

Факультет компьютерных наук
Кафедра кибернетики

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ И ТЕОРИИ
АЛГОРИТМОВ

Инструкция: Выполняется один вариант заданий. Вариант студенту назначает преподаватель

Задание 1.

Доказать секвенцию исчисления высказываний тремя способами:

- сравнением таблиц истинности;
- построением доказательства в виде дерева;
- методом резолюций.

Задание 2.

Перевести с естественного языка на язык исчисления предикатов и сделать вывод, если это возможно.

Вариант 1

1. $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

2. *Боль подтачивает силы человека.
Никакая боль не желательна.*

Вариант 2

1. $A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

2. *Тем, кто лыс, расческа не нужна.
Ни одна ящерица не имеет волос.*

Вариант 3

1. $(A \vee B) \wedge C \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

2. *Все невнимательные люди совершают оплошности.
Ни один внимательный человек не забывает своих обещаний.*

Вариант 4

1. $(A \wedge B) \vee C \vdash (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

2. *Мне Джон не нравится.
Некоторым из моих друзей Джон нравится.*

Вариант 5

1. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$.
2. *Картошка — не ананас.*
Все ананасы приятны на вкус.

Вариант 6

1. $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)$.
2. *Ни одна булавка не имеет честолубия.*
Ни одна иголка — не булавка.

Вариант 7

1. $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge C$.
2. *Все мои друзья простудились.*
Таму, кто простужен, нельзя петь.

Вариант 8

1. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C$.
2. *Все эти блюда отлично приготовлены.*
Некоторые блюда, если их плохо приготовить, вредны для здоровья.

Вариант 9

1. $A \wedge \neg(B \vee C) \vdash A \wedge (\neg B \wedge \neg C)$.
2. *Все лекарства неприятны на вкус.*
Александрійский лист — лекарство.

Вариант 10

1. $A \wedge \neg(B \wedge C) \vdash (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg C)$.
2. *Некоторые устрицы молчаливы.*
Молчаливые существа не очень-то забавны.

Вариант 11

1. $A \vee \neg(B \vee C) \vdash (A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg C)$.
2. *Все разумные люди ходят на ногах.*
Все неразумные люди ходят на руках.

Вариант 12

1. $A \vee \neg(B \wedge C) \vdash A \vee (\neg B \vee \neg C)$.
2. *Занимайтесь своим делом.
Эта ссора — не ваше дело.*

Вариант 13

1. $\neg(A \vee B) \wedge C \vdash (\neg A \wedge \neg B) \wedge C$.
2. *Ни один мост не сделан из сахара.
Некоторые мосты очень красивы.*

Вариант 14

1. $\neg(A \wedge B) \wedge C \vdash (\neg A \wedge C) \vee (\neg B \wedge C)$.
2. *Ни одна загадка, имеющая решение, не интересует меня.
Все эти загадки неразрешимы.*

Вариант 15

1. $\neg(A \vee B) \vee C \vdash (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$.
2. *Джон прилежен.
Все прилежные люди счастливы.*

Вариант 16

1. $\neg(A \wedge B) \vee C \vdash (\neg A \vee \neg B) \vee C$.
2. *Ни одна лягушка не пишет книг.
Некоторые люди пользуются чернилами, когда пишут книги.*

Вариант 17

1. $A \wedge (\neg B \wedge \neg C) \vdash A \wedge \neg(B \vee C)$.
2. *Ни одна кочерга не мягкая.
Все подушки мягкие.*

Вариант 18

1. $(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg C) \vdash A \wedge \neg(B \wedge C)$.
2. *Все антилопы стройные.
Стройные животные радуют глаз.*

Вариант 19

1. $(A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg C) \vdash A \vee \neg(B \vee C)$.
2. *Некоторые дядюшки не отличаются щедростью.
Все купцы щедрь.*

Вариант 20

1. $A \vee (\neg B \vee \neg C) \vdash A \vee \neg(B \wedge C)$.
2. *Ни один несчастный человек не хохочет.
Ни один счастливый человек не стонет.*

Вариант 21

1. $(\neg A \wedge \neg B) \wedge C \vdash \neg(A \vee B) \wedge C$.
2. *Музыка, которую слышно, вызывает колебания воздуха.
Музыка, которую не слышно, не стоит того, чтобы за нее платили деньги.*

Вариант 22

1. $(\neg A \wedge C) \vee (\neg B \wedge C) \vdash \neg(A \wedge B) \wedge C$.
2. *Ни один еврей не толстый мельник.
Все мои друзья толстые мельники.*

Вариант 23

1. $(\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \vdash \neg(A \vee B) \vee C$.
2. *Мука пригодна для пищи.
Толокно — сорт муки.*

Вариант 24

1. $(\neg A \vee \neg B) \vee C \vdash \neg(A \wedge B) \vee C$.
2. *Ласки иногда спят.
Все животные иногда спят.*

Вариант 25

1. $A \rightarrow (B \vee C) \vdash (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$.
2. *Некоторые сны ужасны.
Ни один ягненок не способен вызвать ужас.*

Вариант 26

1. $A \rightarrow (B \wedge C) \vdash (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$.
2. *Ни один богатый человек не просит милостыни.
Всем, кто небогат, следует думать о расходах.*

Вариант 27

1. $A \vee (B \rightarrow C) \vdash (A \vee B) \rightarrow (A \vee C)$.
2. Ни один вор не честен.
Некоторых нечестных людей удаётся уличить.

Вариант 28

1. $A \wedge (B \rightarrow C) \vdash (A \wedge B) \rightarrow (A \wedge C)$.
2. Все осы не общительные.
Все щенки общительные.

Вариант 29

1. $(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C) \vdash A \rightarrow (B \vee C)$.
2. Все неправдоподобные истории вызывают сомнения.
Все эти истории вполне правдоподобны.

Вариант 30

1. $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \vdash A \rightarrow (B \wedge C)$.
2. Он сказал мне, что вы ушли.
Он никогда не говорит ни слова правды.

Вариант 31

1. $(A \vee B) \rightarrow (A \vee C) \vdash A \vee (B \rightarrow C)$.
2. Он всегда поет меньше часа.
Слушать пение больше часа утомительно.

Вариант 32

1. $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$.
2. Ни один свадебный пирог не полезен.
Неполезной пищи следует избегать.

Вариант 33

1. $(A \vee B) \rightarrow C \vdash (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$.
2. Ни один старый скряга не весел.
Некоторые старые скряги тощи.

Вариант 34

1. $(A \rightarrow B) \vee C \vdash (A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$.
2. Все утки при ходьбе переваливаются с боку на бок.
Все, что переваливается с боку на бок, не изящно.

Вариант 35

1. $(A \rightarrow B) \wedge C \vdash (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)$.
2. *Ни один профессор не невежествен.*
Некоторые невежественные люди тщеславны.

Вариант 36

1. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \vdash (A \vee B) \rightarrow C$.
2. *Зубная боль всегда неприятна.*
Тепло всегда приятно.

Вариант 37

1. $(A \vee C) \rightarrow (B \vee C) \vdash (A \rightarrow B) \vee C$.
2. *Скучные люди невыносимы.*
Вы скучный человек.

Вариант 38

1. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C$.
2. *Некоторые горы непреодолимы.*
Все заборы вполне преодолимы.

Вариант 39

1. $A \wedge (B \wedge C) \vdash (A \wedge B) \wedge C$.
2. *Ни один француз не любит пудинг.*
Все англичане любят пудинг.

Вариант 40

1. $A \vee (B \vee C) \vdash (A \vee B) \vee C$.
2. *Ни один лентяй не достоин славы.*
Некоторые художники не лентяи.

Вариант 41

1. $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
2. *Ни одному амару нельзя отказать в уме.*
Ни одно разумное существо не будет надеяться на невозможное.

Вариант 42

1. $A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
2. *Ни один добрый поступок не является незаконным.
Все, что законно, можно делать без страха.*

Вариант 43

1. $(A \vee B) \wedge C \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.
2. *Ни у одного ископаемого животного не может быть несчастной любви.
У устрицы может быть несчастная любовь.*

Вариант 44

1. $(A \wedge B) \vee C \vdash (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.
2. *Это выше моего терпения.
Со мной никогда не случалось ничего, что было бы выше моего терпения.*

Вариант 45

1. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$.
2. *Все необразованные люди поверхностны.
Все эти студенты образованны.*

Вариант 46

1. $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)$.
2. *Все мои кузины несправедливы.
Ни один судья не несправедлив.*

Вариант 47

1. $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge C$.
2. *Ни одна исследованная страна не кишит драконами.
Неисследованные страны пленяют воображение.*

Вариант 48

1. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C$.
2. *Ни один скряга не щедр.
Некоторые старики не щедры.*

Вариант 49

1. $A \wedge \neg(B \vee C) \vdash A \wedge (\neg B \wedge \neg C)$.
2. *Все осмотрительные люди остерегаются гиен.
Ни одному банкиру не свойственна неосмотрительность.*

Вариант 50

1. $A \wedge \neg(B \wedge C) \vdash (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg C)$.
2. *Некоторые стихи оригинальны.*
Ни одна оригинальная работа не пишется по заказу.

Вариант 51

1. $A \vee \neg(B \vee C) \vdash (A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg C)$.
2. *Все скряги эгоистичны.*
Никто, кроме скряг, не собирает яичной скорлупы.

Вариант 52

1. $A \vee \neg(B \wedge C) \vdash A \vee (\neg B \vee \neg C)$.
2. *Все бледные люди флегматичны.*
Только те, кто бледен, имеют поэтическую внешность.

Вариант 53

1. $\neg(A \vee B) \wedge C \vdash (\neg A \wedge \neg B) \wedge C$.
2. *Все пауки ткут паутину.*
Некоторые существа, не ткущие паутину, — дикари.

Вариант 54

1. $\neg(A \wedge B) \wedge C \vdash (\neg A \wedge C) \vee (\neg B \wedge C)$.
2. *Ни одна из моих кузин не справедлива.*
Все судьи справедливы.

Вариант 55

1. $\neg(A \vee B) \vee C \vdash (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$.
2. *Джон очень трудолюбив.*
Ни один трудолюбивый человек не несчастлив.

Вариант 56

1. $\neg(A \wedge B) \vee C \vdash (\neg A \vee \neg B) \vee C$.
2. *Зонтики бывают полезны в пути.*
Все, что не нужно в пути, следует оставить дома.

Вариант 57

1. $A \wedge (\neg B \wedge \neg C) \vdash A \wedge \neg(B \vee C)$.
2. *Ни одна кочерга не мягкая.*
Некоторые подушки мягкие.

Вариант 58

1. $(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg C) \vdash A \wedge \neg(B \wedge C)$.
2. *Ни один император не дантист.
Всех дантистов боятся дети.*

Вариант 59

1. $(A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg C) \vdash A \vee \neg(B \vee C)$.
2. *Ни одно успешное путешествие не остается забытым.
Неудачное путешествие не заслуживает того, чтобы о нем писали.*

Вариант 60

1. $A \vee (\neg B \vee \neg C) \vdash A \vee \neg(B \wedge C)$.
2. *Сахар сладкий.
Некоторые сладкие вещи очень нравятся детям.*

Вариант 61

1. $(\neg A \wedge \neg B) \wedge C \vdash \neg(A \vee B) \wedge C$.
2. *Все пилулы – лекарства.
Ни одно лекарство не приятно на вкус.*

Вариант 62

1. $(\neg A \wedge C) \vee (\neg B \wedge C) \vdash \neg(A \wedge B) \wedge C$.
2. *Ни одно четвероногое не может свистеть.
Некоторые кошки – четвероногие.*

Вариант 63

1. $(\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \vdash \neg(A \vee B) \vee C$.
2. *Я видел это в газетах.
Все газеты печатают небылицы.*

Вариант 64

1. $(\neg A \vee \neg B) \vee C \vdash \neg(A \wedge B) \vee C$.
2. *Все осы не дружелюбны.
Ни один щенок не враждебен.*

Задание 3.

Доказать или опровергнуть секвенцию в указанном исчислении.

Вариант 1

$$A \rightarrow B \vdash \Box A \rightarrow B \text{ в I.}$$

Вариант 2

$$\Box A \vee \Box B \vdash \Diamond(A \vee B) \text{ в D.}$$

Вариант 3

$$\Box A \wedge \Box B \vdash \Diamond(A \wedge B) \text{ в E.}$$

Вариант 4

$$A \rightarrow B \vdash A \rightarrow \Diamond B \text{ в T.}$$

Вариант 5

$$\Diamond A \vee \Diamond B \vdash \Diamond(A \vee B) \text{ в I.}$$

Вариант 6

$$A \rightarrow B \vdash \Box A \rightarrow \Diamond B \text{ в E.}$$

Вариант 7

$$\Box(A \vee \Box B) \vdash \Box A \vee \Box B \text{ в S5.}$$

Вариант 8

$$\Box(A \rightarrow B) \vdash \Diamond A \rightarrow \Diamond B \text{ в T.}$$

Вариант 9

$$\Box(A \vee B) \vdash \Box A \vee \Box B \text{ в D.}$$

Вариант 10

$$\Diamond A \wedge \Diamond B \vdash \Diamond(A \wedge B) \text{ в I.}$$

Вариант 11

$$\Box(A \rightarrow B), \Box(\neg A \rightarrow B) \vdash \Box B \text{ в E.}$$

Вариант 12

$$\Box \Diamond \Box A \vdash \Box A \text{ в S4.}$$

Вариант 13

$$\Box(A \rightarrow B) \vdash \Box A \rightarrow \Diamond B \text{ в T.}$$

Вариант 14

$$\Box(A \vee B) \vdash \Diamond A \vee \Diamond B \text{ в D.}$$

Вариант 15

$$\Diamond(A \wedge B) \vdash \Diamond A \wedge \Diamond B \text{ в I.}$$

Вариант 16

$$\Box(A \vee \Diamond B) \vdash \Box A \vee \Box B \text{ в S5.}$$

Вариант 17

$\Box(A \rightarrow B), \Box(\neg A \rightarrow B) \vdash \Diamond B$ в E.

Вариант 18

$\Diamond A \vdash \Diamond \Box \Diamond A$ в DS4.

Вариант 19

$\Diamond(A \rightarrow B) \vdash \Diamond A \rightarrow \Diamond B$ в T.

Вариант 20

$\Diamond(A \vee B) \vdash \Diamond A \vee \Diamond B$ в E.

Вариант 21

$\Box(A \wedge B) \vdash \Diamond A \wedge \Diamond B$ в D.

Вариант 22

$\Box A \vdash \Box \Diamond \Box A$ в ES4.

Вариант 23

$\Box(A \rightarrow B), \Box(A \rightarrow \neg B) \vdash \Box \neg A$ в E.

Вариант 24

$\Diamond(A \rightarrow B) \vdash \Box A \rightarrow \Diamond B$ в T.

Вариант 25

$\Box(A \rightarrow B), \Box(A \rightarrow \neg B) \vdash \neg \Box A$ в E.

Вариант 26

$\Diamond \Box \Diamond A \vdash \Diamond A$ в DS4.

Вариант 27

$A \rightarrow B \vdash \Box A \rightarrow B$ в T.

Вариант 28

$\Box A \vee \Box B \vdash \Diamond(A \vee B)$ в I.

Вариант 29

$\Box A \wedge \Box B \vdash \Diamond(A \wedge B)$ в D.

Вариант 30

$A \rightarrow B \vdash A \rightarrow \Diamond B$ в E.

Вариант 31

$\Diamond A \vee \Diamond B \vdash \Diamond(A \vee B)$ в ES5.

Вариант 32

$A \rightarrow B \vdash \Box A \rightarrow \Diamond B$ в T.

Вариант 33

$\Box A \wedge \Box B \vdash \Box(A \wedge B)$ в E.

Вариант 34

$\Box(A \rightarrow B) \vdash \Diamond A \rightarrow \Diamond B$ в I.

Вариант 35

$\Box(A \vee B) \vdash \Box A \vee \Diamond B$ в S5.

Вариант 36

$\Diamond A \wedge \Diamond B \vdash \Diamond(A \wedge B)$ в E.

Вариант 37

$\Box(A \rightarrow B), \Box(\neg A \rightarrow B) \vdash \Box B$ в D.

Вариант 38

$\Box\Diamond\Box A \vdash \Box A$ в S5.

Вариант 39

$\Box(A \rightarrow B) \vdash \Box A \rightarrow \Diamond B$ в I.

Вариант 40

$\Box(A \vee B) \vdash \Diamond A \vee \Diamond B$ в E.

Вариант 41

$\Diamond(A \wedge B) \vdash \Diamond A \wedge \Diamond B$ в ES4.

Вариант 42

$\Box A \vee \Box B \vdash \Box(A \vee B)$ в I.

Вариант 43

$\Diamond A \wedge \Diamond B \vdash \Diamond(A \wedge \Diamond B)$ в S5.

Вариант 44

$\Diamond A \vdash \Diamond\Box\Diamond A$ в ES5.

Вариант 45

$\Diamond(A \rightarrow B) \vdash \Diamond A \rightarrow \Diamond B$ в D.

Вариант 46

$\Diamond(A \vee B) \vdash \Diamond A \vee \Diamond B$ в I.

Вариант 47

$\Box(A \wedge B) \vdash \Diamond A \wedge \Diamond B$ в T.

Вариант 48

$\Box A \vdash \Box\Diamond\Box A$ в S4.

Вариант 49

$\Box(A \rightarrow B), \Box(A \rightarrow \neg B) \vdash \Box\neg A$ в D.

Вариант 50

$\Diamond(A \rightarrow B) \vdash \Box A \rightarrow \Diamond B$ в E.

Вариант 51

$\diamond A \wedge \square B \vdash \diamond(A \wedge \square B)$ в S5.

Вариант 52

$\diamond \square A \vdash \diamond A$ в S4.

Вариант 53

$A \rightarrow B \vdash \square A \rightarrow B$ в E.

Вариант 54

$\square A \wedge \square B \vdash \diamond(A \wedge B)$ в T.

Вариант 55

$A \rightarrow B \vdash \square A \rightarrow \diamond B$ в I.

Вариант 56

$\square(A \vee \square B) \vdash \square A \vee \square B$ в ES5.

Вариант 57

$\diamond A \wedge \diamond B \vdash \diamond(A \wedge B)$ в D.

Вариант 58

$\square(A \rightarrow B) \vdash \square A \rightarrow \diamond B$ в E.

Вариант 59

$\diamond A \wedge \diamond B \vdash \diamond(A \wedge \diamond B)$ в DS4.

Вариант 60

$\square(A \wedge B) \vdash \diamond A \wedge \diamond B$ в ES4.

Вариант 61

$\diamond(A \rightarrow B) \vdash \square A \rightarrow \diamond B$ в I.

Вариант 62

$\square(A \vee \square B) \vdash \square A \vee \square B$ в DS4.

Вариант 63

$\square(A \rightarrow B), \square \neg B \vdash \neg \diamond A$ в D.

Вариант 64

$\diamond A \wedge \diamond B \vdash \diamond(A \wedge \diamond B)$ в ES5.

Вопросы к экзамену по математической логике и теории алгоритмов

1. Понятие формальной теории (исчисления). Синтаксический вывод и семантическая истинность. Задачи математической логики.
2. Исчисление высказываний (ИВ). Определение доказуемости.
3. Эквивалентность формул. КНФ и ДНФ.
4. Семантика ИВ. Таблицы истинности.
5. Характеризация доказуемых формул ИВ.
6. Полнота и непротиворечивость ИВ.
7. Метод резолюций для ИВ. Хорновские дизъюнкты.
8. Исчисление предикатов (ИП). Кванторы.
9. Основные эквивалентности формул ИП. Пренексная нормальная форма.
10. Полнота и непротиворечивость ИП.
11. Унификация формул ИП.
12. Сколемизация формул. Метод резолюций для ИП.
13. Логическое программирование. Язык ПРОЛОГ.
14. Особенности перевода с естественного языка на язык математической логики.
15. Интуиционистская логика
16. Нечеткие множества и нечеткая логика.
17. Модальная логика. Исчисления I и T.
18. Модальная логика. Исчисления S4 и S5.
19. Семантика Крипке для модальной логики.
20. Деонтические модальные исчисления.
21. Временные логики. Алгоритмические логики.
22. Понятие алгоритма. Тезис Черча. Нормальные алгоритмы.
23. Прimitивно рекурсивные, частично рекурсивные и рекурсивные функции.
24. Машины Тьюринга.
25. Понятие универсальности.
26. Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества. Пример рекурсивно перечислимого не рекурсивного множества.
27. Теорема Геделя о неполноте арифметики.
28. Сложность алгоритмов.

Литература

1. *Гуц А.К.* Математическая логика и теория алгоритмов. М.: 2009.
2. *Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В.* Математическая логика и теория алгоритмов. Новосибирск: 2004.
3. *Бесценный И.П.* Практикум по математической логике. Омск: 2008.
4. *Бесценный И.П.* Практикум по модальной логике. Омск: 2009.