

Министерство образования и науки Российской Федерации
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского
Факультет компьютерных наук
Кафедра информационной безопасности

С.В. Усов

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ
НАПРАВЛЕНИЯ «ИНФОРМАТИКА
И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА»

Омск – 2011

УДК 510+519
ББК 22.176я73
У 760

Рецензент: к.т.н. Лавров Д.Н.

Усов С.В.

У 760 Дискретная математика. Учебно-методическое пособие для студентов направления «Информатика и вычислительная техника». – Омск: ОмГУ, 2011. – 60 с.

В сборнике представлено сокращенное содержание курса дисциплины «Дискретная математика», примеры выполнения практических заданий и задания типового расчета по этой дисциплине.

Предназначается для студентов, обучающихся по направлению 552800 – «Информатика и вычислительная техника».

УДК 510+ 519
ББК 22.176я73

Одобрено учебно-методической комиссией и ученым советом факультета компьютерных наук ОмГУ.

© Усов С.В., 2011
© ГОУ ОмГУ им. Ф.М. Достоевского, 2011

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. Операции над множествами	5
Типовые задания	11
2. Отношения на множествах	12
Типовые задания	16
3. Принцип математической индукции.....	18
Типовые задания.....	21
4. Булевы функции	23
Типовые задания	29
5. Совершенные нормальные формы.....	30
Типовые задания	32
6. Минимизация булевых функций	33
Типовые задания	37
7. Полные системы булевых функций	38
Типовые задания	43
8. Комбинаторика	44
Типовые задания	47
9. Элементы теории графов.....	49
Типовые задания	53
10. Отыскание минимального остова.....	54
Типовые задания	56
Литература	59

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие содержит типовой расчет по дисциплине «Дискретная математика» для студентов направления «Информатика и вычислительная техника» ФКН ОмГУ.

Пособие состоит из десяти тематических глав, посвященных различным разделам дисциплины. В частности, освещены элементы теории множеств, метод математической индукции, теория булевых функций, простейшие комбинаторные формулы и элементы теории графов.

Первая часть каждой главы посвящена краткому изложению теоретического материала, необходимого для решения типового расчета. Теоретическую часть методички также можно использовать в качестве конспекта для подготовки к экзамену. Вторая часть каждой главы содержит примеры решения типовых заданий. Наконец, третья часть содержит 30 вариантов заданий по теме главы. Данные задания можно использовать на усмотрение преподавателя как для выдачи типового расчета, так и для проведения аудиторной контрольной работы. Номер каждой задачи состоит из двух чисел, разделенных точкой. Первое число означает номер главы, второе – номер варианта. Так, например, задача 8.21 – это задача 21-го варианта в восьмой главе.

При решении типового расчета студент может определять свой вариант одним из следующих способов:

а) Пусть N – номер студента в списке группы, а K – номер его варианта. Если N не превосходит 30, то $K=N$. Если N лежит на отрезке от 31 до 60, то $K=N-30$. Если $N>60$, то $K=N-60$.

б) Студент выписывает первые 10 букв своих имени и фамилии, затем заменяет каждую букву на ее номер в алфавите. При этом Э заменяется на 29, Ю – на 7, а Я – на 28. Полученные числа и будут являться номерами вариантов в соответствующих главах. Например, студент ИВАНОВ ПЁТР получит последовательность из десяти чисел: 10, 3, 1, 15, 16, 3, 17, 7, 20, 18. Это значит, что в первой главе он будет выполнять 10-й вариант (задание 1.10), во второй главе – третий (задание 2.3) и т.д., в десятой главе – 18-й вариант.

В качестве дополнительных теоретических материалов по дисциплине «Дискретная математика» рекомендуется воспользоваться [1] и [2].

1. Операции над множествами

Понятие множества принадлежит к числу основных, неопределяемых понятий математики. Оно не сводится к другим, более простым понятиям, поэтому его нельзя определить, а можно лишь пояснить, указывая синонимы слова «множество» и приводя примеры множеств: множество – набор, совокупность, собрание каких-либо объектов (элементов), обладающих общим для всех их характеристическим свойством. Когда говорят о множестве, то имеют в виду некоторое собрание объектов, причём само это собрание рассматривается как единое целое, как один (новый) объект. Объекты, составляющие данное множество, называют его элементами.

Примеры множеств:

- 1) множество студентов в данной аудитории;
- 2) отрезок числовой прямой от $-1/2$ до 2 , т.е. $[-1/2 ; 2]$;
- 3) множество чётных чисел;
- 4) множество корней уравнения $x^2-5x+6=0$;

Множества в первом и четвертом примерах являются конечными. Множества во втором и третьем примерах являются бесконечными.

Множество обычно обозначают большими латинскими буквами, а элементы множества – малыми латинскими буквами. Если элемент a принадлежит множеству A , то пишут: $a \in A$, а если a не принадлежит A , то пишут: $a \notin A$.

Например, пусть \mathbf{N} – множество натуральных чисел. Тогда $5 \in \mathbf{N}$, но $1/3 \notin \mathbf{N}$. Если A – множество корней уравнения $x^2-5x+6=0$, то $3 \in A$, а $4 \notin A$.

В математике часто исследуются так называемые числовые множества, т.е. множества, элементами которых являются числа. Для самых основных числовых множеств утвердились следующие обозначения:

\mathbf{N} - множество всех натуральных чисел;

\mathbf{Z} - множество всех целых чисел;

\mathbf{Q} - множество всех рациональных чисел;

\mathbf{R} - множество всех действительных чисел.

Приняты также обозначения \mathbf{Z}^+ , \mathbf{Q}^+ , \mathbf{R}^+ соответственно для множеств всех неотрицательных целых, рациональных и действительных чисел.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым. Символически оно обозначается знаком \emptyset . Например, таково множество действительных корней уравнения $x^2+1=0$.

Существуют два основных способа задания множества:

1) перечисление элементов множества;

2) указание характеристического свойства элементов множества, т.е. такого свойства, которым обладают все элементы данного множества, и только они.

Первым способом особенно часто задаются конечные множества. Например, множество студентов учебной группы задаётся их списком. Множество, состоящее из элементов a, b, c, \dots, d , обозначают с помощью фигурных скобок: $A = \{a; b; c; \dots; d\}$. Множество корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ состоит из двух чисел 2 и 3: $A = \{2; 3\}$. Множество B целых решений неравенства $-2 < x < 3$ состоит из чисел $-1, 0, 1, 2$, поэтому $B = \{-1; 0; 1; 2\}$.

Второй способ задания множества является более универсальным. Множество элементов x , обладающих данным характеристическим свойством $P(x)$, также записывают с помощью фигурных скобок: $X = \{x \mid P(x)\}$, и читают: множество X состоит из элементов x , таких, что выполняется свойство $P(x)$.

Например, $A = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$. Решив уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$, мы можем записать множество A первым способом: $A = \{2; 3\}$.

Другой пример. Рассмотрим множество чётных натуральных чисел. Зададим его с помощью характеристического свойства:

$$B = \{x \mid x - \text{чётное натуральное число}\} = \{x \mid x = 2k, k \in N\}.$$

Множество B является подмножеством множества A тогда и только тогда, когда каждый элемент множества B является элементом множества A . Обозначение: $B \subset A$. Если, например, A - множество всех студентов вуза, а B - множество студентов-первокурсников этого вуза, то B есть подмножество A .

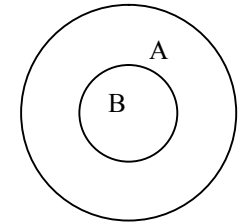
Пустое множество является подмножеством любого множества. Также, каждое множество является подмножеством самого себя: $A \subset A$. Эти два подмножества называются несобственными, поскольку имеются у каждого множества. Все остальные подмножества называются собственными.

Множество всех подмножеств множества A называется булеаном и обозначается 2^A .

Множества A и B называются равными ($A=B$), если $B \subset A$ и $A \subset B$.

Множество, которое содержит в качестве своего подмножества любое другое множество, будем называть универсальным (или универсумом) и обозначать буквой U .

Для наглядного представления множеств используют диаграммы Эйлера-Венна. В этом случае множества обозначают областями на плоскости и внутри этих областей условно располагают элементы множества. Часто все множества на диаграмме размещают внутри прямоугольника, который представляет собой универсум U . Если элемент принадлежит более чем одному множеству, то области, отвечающие таким множествам, должны перекрываться, чтобы общий элемент мог одновременно находиться в соответствующих областях. Выбор формы областей, изображающих множества на диаграммах, может быть произвольным (круги, многоугольники и т.п.). Покажем, например, с помощью диаграммы Эйлера-Венна, что множество A является подмножеством множества B (см. рис. справа):



С помощью такой диаграммы становится наглядным, например, такое утверждение: если $A \subset B$, а $B \subset C$, то $A \subset C$.

Строгое доказательство этого утверждения, не опирающееся на диаграмму, можно провести так: пусть $x \in A$; так как $A \subset B$, то $x \in B$, а так как $B \subset C$, то из $x \in B$ следует, что $x \in C$; значит, из того, что $x \in A$, следует $x \in C$, а поэтому $A \subset C$.

Операции над множествами

С помощью нескольких множеств можно строить новые множества или, как говорят, производить операции над множествами. Мы рассмотрим следующие операции над множествами: объединение, пересечение, разность множеств, дополнение множества. Все рассматриваемые операции над множествами мы будем иллюстрировать на диаграммах Эйлера-Венна.

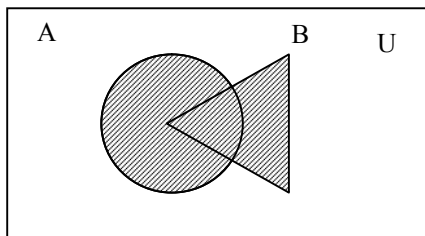
Объединение множеств

Объединением $A \cup B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B .

Символическая запись этого определения: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Отметим, что элемент, входящий в оба множества A и B , входит в их объединение только один раз (поскольку для множества не имеет смысла говорить о том, что элемент входит в него несколько раз).

Поясним определение объединения множеств с помощью диаграммы Эйлера-Венна:



На диаграмме объединение множеств A и B выделено штриховкой.

Примеры объединений двух множеств:

1) Пусть $A = \{2; 5; 7\}$, $B = \{3; 5; 6\}$. Тогда $A \cup B = \{2; 3; 5; 6; 7\}$.

2) Пусть $A = [-1/4; 2]$, $B = [-2/3; 7/4]$. Тогда $A \cup B = [-2/3; 2]$.

3) Пусть $A = \{x \mid x=8k, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x \mid x=8n-4, n \in \mathbf{Z}\}$. Тогда $A \cup B = \{x \mid x=4m, m \in \mathbf{Z}\}$.

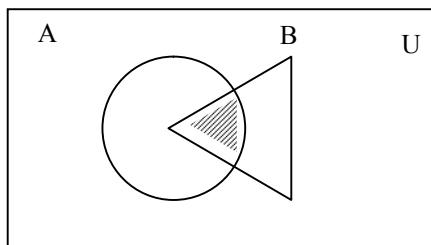
Определение объединения множеств можно распространить на случай любого количества множеств: $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ или } x \in A_2 \text{ или } \dots \text{ или } x \in A_n\}$.

Пересечение множеств

Пересечением $A \cap B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно каждому из множеств A и B . Символическая запись этого определения:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Поясним определение пересечения множеств с помощью диаграммы Эйлера-Венна:



На диаграмме пересечение множеств A и B выделено штриховкой.

Примеры пересечений двух множеств:

1) Пусть $A = \{2; 5; 7; 8\}$, $B = \{3; 5; 6; 7\}$. Тогда $A \cap B = \{5; 7\}$.

2) Пусть $A = [-1/4; 7/4]$, $B = [-2/3; 3/2]$. Тогда $A \cap B = [-1/4; 3/2]$.

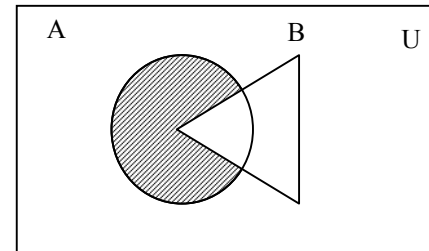
3) Пусть $A = \{x \mid x=2k, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x \mid x=3n, n \in \mathbf{Z}\}$. Тогда $A \cap B = \{x \mid x=6m, m \in \mathbf{Z}\}$.

4) Пусть A – множество всех прямоугольников, B – множество всех ромбов. Тогда $A \cap B$ – множество фигур, одновременно являющихся и прямоугольниками, и ромбами, т.е. множество всех квадратов.

Определение пересечения множеств можно распространить на случай любого количества множеств: $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x \mid x \in A_i, i = \overline{1..n}\}$.

Разность множеств

Разностью $A \setminus B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A , которые не принадлежат множеству B , т.е. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$, что можно пояснить на диаграмме Эйлера-Венна следующим образом:



На диаграмме разность $A \setminus B$ выделена штриховкой.

Примеры разностей множеств:

1) Пусть $A = \{1; 2; 5; 7\}$, $B = \{1; 3; 5; 6\}$. Тогда $A \setminus B = \{2; 7\}$, а $B \setminus A = \{3; 6\}$.

2) Пусть $A = [-1/4; 2]$, $B = [-2/3; 7/4]$. Тогда $A \setminus B = (7/4; 2]$, а $B \setminus A = [-2/3; -1/4)$.

3) Пусть A – множество всех четных целых чисел, B – множество всех целых чисел, делящихся на 3. тогда $A \setminus B$ – множество всех четных целых чисел, которые не делятся на 3, а $B \setminus A$ – множество всех нечетных целых чисел, кратных трем.

Дополнение множества

Дополнением \overline{A} множества A называется множество $U \setminus A = \{x \mid x \notin A\}$.

Примеры дополнений множеств:

1) U – множество арабских цифр, $A = \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$, тогда $\overline{A} = \{0, 3, 7, 9\}$.

2) U – множество всех натуральных чисел, A – множество всех четных чисел. Тогда \overline{A} – множество всех нечетных чисел.

Операции над множествами обладают рядом свойств, которые можно найти в соответствующей литературе.

Говорят, что множества A_1, A_2, \dots, A_n покрывают множество B , если $B \subset A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.

Пример 1.1. Заданы подмножества $A = \{\text{понедельник, среда}\}$, $B = \{\text{вторник, среда, суббота}\}$ и $C = \{\text{среда, четверг, суббота, воскресенье}\}$ множества U всех дней недели. Найдите подмножества $D = A \cup (B \cap C)$, $E = (C \setminus B) \cap A$. Является ли одно из множеств D, E подмножеством другого? Верно ли, что множества A, B и C покрывают множество U всех дней недели?

Решение: Для нахождения множества D сначала найдем $B \cap C = \{\text{среда, суббота}\}$. Теперь объединим $B \cap C$ с множеством A , получим $D = \{\text{понедельник, среда, суббота}\}$.

Аналогично, для нахождения множества E сначала найдем множество $C \setminus B = \{\text{четверг, воскресенье}\}$, а затем его дополнение $\overline{C \setminus B} = \{\text{понедельник, вторник, среда, пятница, суббота}\}$. Наконец, пересечем $\overline{C \setminus B}$ с множеством $A = \{\text{понедельник, среда}\}$, получив $E = \{\text{понедельник, среда}\}$.

D не является подмножеством E , поскольку содержит элемент «суббота», отсутствующий в E . Напротив, E является подмножеством D ($E \subset D$), поскольку в D отсутствует вторник.

Чтобы определить, покрывают ли A, B и C все множество дней недели, найдем $A \cup B \cup C = \{\text{понедельник, вторник, среда, четверг, суббота, воскресенье}\}$. Универсальное множество U всех дней недели содержит еще элемент «пятница», который отсутствует в $A \cup B \cup C$. Следовательно, U – не подмножество $A \cup B \cup C$, а это значит, что $\{A, B, C\}$ – не покрытие U .

Типовые задания по теме «Операции над множествами»

Заданы подмножества A , B и C множества арабских цифр. Найдите подмножества $D = A \cup (B \cap C)$, $E = \overline{(C \setminus B)} \cap A$. Является ли одно из множеств D , E подмножеством другого? Верно ли, что A , B и C покрывают все множество арабских цифр?

- 1.1. $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 5; 6; 7\}$, $C = \{0; 4; 8; 9\}$.
- 1.2. $A = \{0; 2; 7\}$, $B = \{1; 3; 5; 7\}$, $C = \{0; 2; 3; 8\}$.
- 1.3. $A = \{1; 2; 7\}$, $B = \{1; 3; 5; 7\}$, $C = \{0; 2; 3; 7\}$.
- 1.4. $A = \{1; 5; 8\}$, $B = \{1; 3; 5; 9\}$, $C = \{0; 2; 3; 7\}$.
- 1.5. $A = \{1; 5; 8\}$, $B = \{1; 3; 6; 7\}$, $C = \{0; 3; 4; 8\}$.
- 1.6. $A = \{1; 2; 3; 5\}$, $B = \{1; 3; 5; 7\}$, $C = \{1; 2; 5; 8\}$.
- 1.7. $A = \{1; 2; 3; 5\}$, $B = \{1; 3; 5\}$, $C = \{1; 2; 5; 8\}$.
- 1.8. $A = \{1; 2; 3; 5\}$, $B = \{1; 3; 7\}$, $C = \{1; 2; 5; 9\}$.
- 1.9. $A = \{1; 2; 3; 5\}$, $B = \{3; 5; 7\}$, $C = \{1; 2; 5; 6\}$.
- 1.10. $A = \{1; 2; 3; 5\}$, $B = \{1; 5; 8\}$, $C = \{1; 3; 5; 8\}$.
- 1.11. $A = \{1; 2; 3; 5; 9\}$, $B = \{1; 3; 5; 7\}$, $C = \{5; 8\}$.
- 1.12. $A = \{1; 2; 3; 5; 8\}$, $B = \{1; 3; 5; 8\}$, $C = \{5; 8\}$.
- 1.13. $A = \{1; 2; 3; 5; 9\}$, $B = \{1; 3; 5; 7\}$, $C = \{5; 9\}$.
- 1.14. $A = \{1; 2; 3; 7; 9\}$, $B = \{1; 3; 5; 7\}$, $C = \{8; 9\}$.
- 1.15. $A = \{0; 2; 3; 5; 9\}$, $B = \{1; 2; 6; 7\}$, $C = \{7; 9\}$.
- 1.16. $A = \{0; 2; 3; 5; 9\}$, $B = \{1; 2; 7\}$, $C = \{2; 3; 6; 7; 9\}$.
- 1.17. $A = \{0; 2; 4; 5; 9\}$, $B = \{1; 2; 6\}$, $C = \{2; 3; 4; 7; 8\}$.
- 1.18. $A = \{0; 2; 3; 5; 9\}$, $B = \{1; 2; 7\}$, $C = \{0; 3; 5; 6; 9\}$.
- 1.19. $A = \{0; 2; 3; 5; 9\}$, $B = \{1; 2; 8\}$, $C = \{0; 3; 5; 6; 8\}$.
- 1.20. $A = \{0; 2; 3; 4; 6\}$, $B = \{1; 2; 7\}$, $C = \{0; 4; 5; 6; 7\}$.
- 1.21. $A = \{0; 2\}$, $B = \{1; 2; 7\}$, $C = \{0; 3; 5\}$.
- 1.22. $A = \{0; 2\}$, $B = \{1; 2; 5\}$, $C = \{0; 4; 5\}$.
- 1.23. $A = \{1; 2\}$, $B = \{1; 2; 3\}$, $C = \{0; 3; 5\}$.
- 1.24. $A = \{1; 2\}$, $B = \{0; 2; 4\}$, $C = \{0; 3; 4\}$.
- 1.25. $A = \{0; 3\}$, $B = \{1; 2; 3\}$, $C = \{0; 3; 5\}$.
- 1.26. $A = \{0; 2; 3; 5; 9\}$, $B = \{1; 2; 7; 8; 9\}$, $C = \{0; 3; 5; 6; 9\}$.
- 1.27. $A = \{1; 2; 4; 5; 7\}$, $B = \{1; 2; 7; 8; 9\}$, $C = \{0; 3; 5; 6; 9\}$.
- 1.28. $A = \{1; 2; 4; 5; 7\}$, $B = \{1; 3; 6; 8; 9\}$, $C = \{0; 3; 5; 6; 8\}$.
- 1.29. $A = \{1; 3; 4; 5; 7\}$, $B = \{1; 3; 6; 8\}$, $C = \{2; 3; 5; 6; 7\}$.
- 1.30. $A = \{0; 3; 4; 6; 7\}$, $B = \{1; 3; 6; 7; 9\}$, $C = \{0; 2; 5; 6; 8\}$.

2. Отношения на множествах

Декартовым (прямым) произведением $A \times B$ множеств A и B называют множество всех упорядоченных наборов (x, y) таких, что $x \in A$, $y \in B$, то есть $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ и } y \in B\}$. Декартово произведение множества A на себя называется декартовым квадратом A и обозначается $A^2 = A \times A$.

Например, пусть $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 3\}$. Тогда, $A \times B = \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3), (c, 2), (c, 3)\}$, $B^2 = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$.

Бинарным отношением R на множествах A и B называется любое подмножество декартова произведения множеств A и B : $R \subseteq A \times B$

Если элементы x и y множеств A и B находятся в отношении R , то пишут $(x, y) \in R$ или xRy . Если $A=B$, то R называется бинарным отношением на A .

Бинарное отношение R на множестве A называется *рефлексивным*, если для всякого $x \in A$ выполняется xRx .

Бинарное отношение R на множестве A называется *антирефлексивным*, если для любых x и y , для которых выполнено xRy следует, что $x \neq y$.

Бинарное отношение R на множестве A называется *симметричным*, если из того, что выполняется xRy следует выполнение yRx .

Бинарное отношение R на множестве A называется *антисимметричным*, если из выполнения xRy и yRx следует, что $x=y$.

Бинарное отношение R на множестве A называется *транзитивным*, если из выполнения xRy и yRz следует выполнение xRz .

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение R на множестве A называется *отношением эквивалентности*.

Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение R на множестве A называется отношением *частичного порядка*.

Пример 2.1. Отношение R на множестве натуральных чисел задано следующим образом: $aRb \Leftrightarrow (a+2b):3$ ($a+2b$ делится на 3). Какими свойствами обладает данное отношение?

Решение.

Это отношение является рефлексивным, т.к. $aRa \Leftrightarrow (a+2a):3 \Leftrightarrow 3a:3$

Отношение R симметрично: $aRb \Leftrightarrow (a+2b):3 \Rightarrow a+2b = 3n \Rightarrow a = 3n - 2b$. Для того чтобы проверить выполнение bRa , необходимо показать, что $(b+2a):3$.

$(b + 2a) = b + 2(3n - 2b) = b + 6n - 4b = 6n - 3b = 3(2n - b)$, а $3(2n - b) : 3 \Rightarrow bRa$ выполнено.

Отношение R не является антисимметричным, т.к. $6R3$, $3R6$, но $6 \neq 3$.

Проверим, что R — транзитивно.
 $aRb \Leftrightarrow (a + 2b) : 3 \Rightarrow a + 2b = 3n \Rightarrow a = 3n - 2b$,
 $bRc \Rightarrow (b + 2c) : 3 \Rightarrow b + 2c = 3m \Rightarrow 2c = 3m - b$. Для того, чтобы проверить выполнение aRc , необходимо показать, что $(a + 2c) : 3$.

$(a + 2c) = 3n - 2b + 3m - b = 3(n + m - b)$, $3(n + m - b) : 3 \Rightarrow aRc$ выполнено.

Заметим, что отношение R является отношением эквивалентности.

Удобным способом представления отношений является *матричная форма*. Рассмотрим два множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ и бинарное отношение $R \subseteq A \times B$. Определим матрицу $[R] = (r_{ij})$ бинарного отношения по следующему правилу:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i R b_j \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Полученная матрица содержит полную информацию о связях между элементами и позволяет представлять эту информацию на компьютере.

Основные свойства матриц бинарных отношений:

Пусть R — бинарное отношение на A^2 , заданное матрицей. Тогда отношение R является

- а) рефлексивным, если на главной диагонали R стоят единицы;
- б) антирефлексивным, если на главной диагонали R стоят нули;
- в) симметричным, если $[R] = [R]^T$ (матрица симметрична относительно главной диагонали);
- г) антисимметричным, если в матрице отсутствуют единицы, симметричные относительно главной диагонали;
- д) транзитивным, если $R \circ R \subseteq R$. Матрица композиции $[R \circ R] = [R] \cdot [R]$, где умножение матриц $[R]$ и $[R]$ выполняется обычным способом, но при этом, умножение элементов соответствует логическому «и» ($0 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$), а сложение элементов — логическому «или» ($0 + 0 = 0$, $1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1$).

Пример 2.2. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$, на множестве A заданы два отношения: $R = \{(x, y) \mid 2x \leq y\}$ и $P = \{(x, y) \mid x + 3y \text{ делится на } 2\}$. Какими свойствами обладают отношения $R, P, S = P \circ R$?

Решение. Запишем отношения в виде множеств:

$$R = \{(1,2); (1,3); (1,4); (2,4)\}.$$

В частности, $1R2$, поскольку $2 \cdot 1 \leq 2$.

$$P = \{(1,1); (1,3); (2,2); (2,4); (3,1); (3,3); (4,2); (4,4)\}.$$

В частности, $1P3$, поскольку $1 + 3 \cdot 3$ делится на 2.

Найдем композицию $S = P \circ R = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,2); (2,4)\}$.

В частности, $2S4$, поскольку $2R4$ и $4P4$.

Запишем матрицы отношений:

$$[R] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [P] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [S] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отношение P является рефлексивным, а отношения R и S не являются рефлексивными (в матрицах отношений на главной диагонали имеются нули).

Отношение R является антирефлексивным, а отношения P и S не являются антирефлексивными (в матрицах отношений на главной диагонали имеются единицы).

Найдем транспонированные матрицы отношений.

$$[R]^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [P]^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [S]^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Из сравнения матриц отношений с транспонированными матрицами этих отношений, находим, что отношение P является симметричным, а отношения R и S не являются симметричными. Отношения R и S являются антисимметричными (у матриц $[R]$ и $[R]^T$, $[S]$ и $[S]^T$ нет совпадающих единиц вне главной диагонали), а отношение P не является антисимметричным (например, $p_{13} = p_{31} = 1$).

Для определения транзитивности отношений найдем произведения каждой матрицы на саму себя.

$$[R] \cdot [R] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq [R],$$

следовательно, R является транзитивным.

$$[P] \cdot [P] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [P],$$

следовательно, P – транзитивно.

$$[S] \cdot [S] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [S],$$

следовательно, S – транзитивно.

Типовые задания по теме «Отношения на множествах»

В задачах 2.1-2.15 на конечном множестве с помощью перечисления задано отношение. Постройте матрицу отношения. Выясните, обладает ли данное отношение свойствами рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности и транзитивности. Установите, является ли данное отношение отношением порядка или эквивалентности.

- 2.1. $R = \{(1;1); (1;2); (1;3); (1;4); (2;2); (2;3); (2;4); (3;3); (3;4); (4;4)\}$.
- 2.2. $R = \{(1;1); (2;1); (2;3); (2;4); (3;2); (3;3); (3;4); (4;3); (4;4)\}$.
- 2.3. $R = \{(1;2); (1;3); (1;4); (2;3); (2;4); (3;4)\}$.
- 2.4. $R = \{(1;1); (2;1); (1;2); (2;4); (2;2); (4;2); (1;4); (4;1); (4;4)\}$.
- 2.5. $R = \{(1;1); (2;1); (1;2); (2;4); (4;2); (1;4); (4;1)\}$.
- 2.6. $R = \{(2;1); (1;2); (2;3); (3;2); (1;3); (3;1)\}$.
- 2.7. $R = \{(1;1); (2;1); (1;2); (2;4); (2;2); (4;2); (1;4); (3;3); (4;1); (4;4)\}$.
- 2.8. $R = \{(1;1); (1;2); (2;4); (2;2); (1;4); (3;3); (4;4)\}$.
- 2.9. $R = \{(1;1); (2;1); (2;2); (4;2); (4;1); (4;4)\}$.
- 2.10. $R = \{(1;3); (1;4); (2;2); (2;3); (2;4); (4;2); (3;4); (4;4)\}$.
- 2.11. $R = \{(2;1); (2;2); (2;4); (3;4); (4;1); (4;2); (4;3); (4;4)\}$.
- 2.12. $R = \{(1;2); (2;3); (3;4); (4;1)\}$.
- 2.13. $R = \{(1;3); (2;1); (2;2); (2;4); (3;2); (3;4); (4;4)\}$.
- 2.14. $R = \{(1;3); (2;4); (3;1); (3;4); (4;2); (4;3)\}$.
- 2.15. $R = \{(1;1); (2;1); (2;2); (3;1); (3;2); (3;3); (4;1); (4;2); (4;3)\}$.

В задачах 2.15-2.30 на множестве действительных чисел аналитически задано отношение. Выясните, обладает ли данное отношение свойствами рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности и транзитивности. Установите, является ли данное отношение отношением порядка или эквивалентности.

- 2.16. $R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}, R \subset \mathbf{R}^2$;
- 2.17. $R = \{(x,y) \mid xy > 1\}, R \subset \mathbf{R}^2$;
- 2.18. $R = \{(x,y) \mid |x| = y\}, R \subset \mathbf{R}^2$;
- 2.19. $R = \{(x,y) \mid x^2 + x = y^2 + y\}, R \subset \mathbf{R}^2$;
- 2.20. $R = \{(x,y) \mid x - y - \text{целое}\}, R \subset \mathbf{R}^2$;
- 2.21. $R = \{(x,y) \mid x + y = -2\}, R \subset \mathbf{R}^2$;
- 2.22. $R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}, R \subset \mathbf{Z}^2$;
- 2.23. $R = \{(x,y) \mid y < x - 1\}, R \subset \mathbf{R}^2$;

- 2.24. $R = \{(x, y) \mid x^2 = y\}, R \subset \mathbf{R}^2$;
2.25. $R = \{(x, y) \mid x + y \text{ кратно } 3\}, R \subset \mathbf{Z}^2$;
2.26. $R = \{(x, y) \mid 2x = 3y\}, R \subset \mathbf{Z}^2$;
2.27. $R = \{(x, y) \mid x + 1 = y\}, R \subset \mathbf{Z}^2$;
2.28. $R = \{(x, y) \mid y \leq x - 2\}, R \subset \mathbf{Z}^2$;
2.29. $R = \{(x, y) \mid \text{НОД}(x, y) \neq 1\}, R \subset \mathbf{N}^2$;
2.30. $R = \{(x, y) \mid x \neq y\}, R \subset \mathbf{N}^2$.

3. Принцип математической индукции

Принцип математической индукции, по сути, является пятой аксиомой из аксиоматики Пеано натуральных чисел. Аксиоматический подход (по сравнению с конструктивным) позволил формализовать арифметику. После введения аксиом стали возможны доказательства многих свойств натуральных и целых чисел, а также использование целых чисел для построения формальных теорий рациональных и вещественных чисел. Принцип математической индукции позволяет давать индукционные определения и доказывать серии утверждений, справедливых для большого количества значений некоторого параметра, который называется параметром индукции.

Вот этот принцип: *Если предикат (утверждение) $P(n)$, зависящий от натурального числа n , истинен для $n=r$ и из того, что он истинен для $n=k$ (где k -любое натуральное число, не меньшее r), следует, что он истинен и для следующего числа $n=k+1$, то предикат (утверждение) $P(n)$ истинен для любого натурального числа n .*

Часто в качестве стартового числа r выступает единица.

Доказательство по методу математической индукции проводится следующим образом. Сначала доказываемое утверждение проверяется для $n=1$, т.е. устанавливается истинность высказывания $P(1)$. Эту часть доказательства называют базой индукции. Во второй части доказательства предполагается, что верно высказывание $P(k)$ для некоторых значений числа k . Затем следует часть доказательства, называемая индукционным шагом (или переходом). В этой части доказывают справедливость утверждения для $n=k+1$ в предположении справедливости утверждения для $n=k$, т.е. доказывают, что $A(k) \Rightarrow A(k+1)$.

Пример 3.1. Найдите сумму первых n последовательных нечётных чисел.

Решение. Сначала рассмотрим частные случаи:

$$1=1=1^2$$

$$1+3=4=2^2$$

$$1+3+5=9=3^2$$

$$1+3+5+7=16=4^2$$

$$1+3+5+7+9=25=5^2$$

После рассмотрения этих нескольких частных случаев напрашивается следующий общий вывод:

$$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$$

т.е. сумма n первых последовательных нечётных чисел равна n^2

Докажем это утверждение с помощью принципа математической индукции.

1. База индукции. $n=1$: $1=1^2$ – верно.

2. Предположение индукции. Пусть утверждение верно для $n=k$, то есть $1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$

3. Шаг индукции. Докажем утверждение для $n=k+1$: $1+3+5+\dots+(2k-1)+(2(k+1)-1)=1+3+5+\dots+(2k-1)+(2k+1)=(\text{по предположению индукции})=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$ – верно.

Утверждение по принципу математической индукции доказано.

Шаг индукции можно провести и иначе, сводя с помощью цепочки утверждений, связанных эквивалентными преобразованиями, утверждение для $n=k+1$ (истинность которого требуется установить) к утверждению для $n=k$ (истинность которого предполагается):

$$1+3+5+\dots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$1+3+5+\dots+(2k-1)=(k+1)^2-(2k+1) \Leftrightarrow$$

$$1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2.$$

Пример 3.2. Докажите, что при любом натуральном n число $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ кратно 19.

Решение.

1. База индукции. $n=1$: $5 \cdot 2 + 3^2$ кратно 19 - верно.

2. Предположение индукции. Пусть для некоторого значения $n=k$ число $5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1}$ кратно 19.

3. Шаг индукции. Докажем, что утверждение верно для $n=k+1$:
 $5 \cdot 2^{3(k+1)-2} + 3^{3(k+1)-1} = 5 \cdot 2^{3k+1} + 27 \cdot 3^{3k-1} =$
 $= 8 \cdot 5 \cdot 2^{3k-2} + 8 \cdot 3^{3k-1} + 19 \cdot 3^{3k-1} = 8(5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1}) + 19 \cdot 3^{3k-1},$
что кратно 19, поскольку первое слагаемое делится на 19 в силу предположения индукции, а второе – содержит 19 в качестве множителя.

Пример 3.3. Докажите, что $(1+\alpha)^n > 1+n\alpha$, где $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$, n – натуральное число, большее 1.

Решение.

1. При $n=2$ неравенство справедливо, так как $(1+\alpha)^2 > 1+2\alpha$ равносильно верному неравенству $\alpha^2 > 0$.

2. Пусть неравенство справедливо при $n=k$, где k – некоторое натуральное число, т.е. $(1+\alpha)^k > 1+k\alpha$.

3. Покажем, что тогда неравенство справедливо и при $n=k+1$, т.е. $(1+\alpha)^{k+1} > 1+(k+1)\alpha$. Действительно, по условию, $1+\alpha > 0$, поэтому справедливо неравенство $(1+\alpha)^{k+1} > (1+k\alpha)(1+\alpha)$, полученное из неравенства в предположении индукции умножением каждой

части его на $1 + \alpha$. Перепишем последнее неравенство так:
 $(1 + \alpha)^{k+1} > 1 + (k + 1)\alpha + k\alpha^2$. Отбросив теперь в правой части положительное слагаемое $k\alpha^2$, получим справедливое неравенство
 $(1 + \alpha)^{k+1} > 1 + (k + 1)\alpha$.

Типовые задания по теме «Принцип математической индукции»

Докажите утверждение с помощью математической индукции для натуральных n .

- 3.1. Докажите, что $1+x^2+x^3+x^4+\dots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, где $x \neq 1$ при всех натуральных n .
- 3.2. Докажите, что $9^{n+1} + 8n + 7$ делится на 16 при всех натуральных n .
- 3.3. Докажите, что $n! > 2^n$ при всех натуральных $n \geq 4$.
- 3.4. Докажите, что $1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n-1)/6$ при всех натуральных n .
- 3.5. Докажите, что $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n = (n-1) \cdot n \cdot (n+1) / 3$ при всех натуральных n .
- 3.6. Докажите, что $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ при всех натуральных n . Здесь $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ – произведение первых n последовательных натуральных чисел.
- 3.7. Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.
- 3.8. Докажите, что $4^n - 3n - 1$ делится на 9 при всех натуральных n .
- 3.9. Докажите, что $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$ при всех натуральных $n > 1$.
- 3.10. Докажите, что $2^n > 2n + 1$ при всех натуральных $n > 2$.
- 3.11. Докажите, что $7^n - 1$ делится на 6 при всех натуральных n .
- 3.12. Докажите, что $n^3 + 11n$ делится на 6 при всех натуральных n .
- 3.13. Докажите, что $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n+1) = (n-1) \cdot n \cdot (n+1)^2$ при всех натуральных n .
- 3.14. Докажите, что $10^n - 1$ делится на 9 при всех натуральных n .
- 3.15. Докажите, что $1/(1 \cdot 2) + 1/(2 \cdot 3) + 1/(3 \cdot 4) + \dots + 1/(n(n+1)) = n/(n+1)$ при всех натуральных n .

- 3.16. Докажите, что $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n-1}{2n}$ при всех натуральных $n \geq 2$.
- 3.17. Докажите, что $1/2! + 2/3! + \dots + (n-1)/n! = 1 - (1/n!)$ при всех натуральных n . Здесь $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ – произведение первых n последовательных натуральных чисел.
- 3.18. Докажите, что $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \dots + n(3n-1) = n^2 \cdot (n+1)$ при всех натуральных n .
- 3.19. Докажите, что $n^3 + 5n$ делится на 6 при всех натуральных n .
- 3.20. Докажите, что $4^n + 15n - 1$ делится на 9 при всех натуральных n .
- 3.21. Докажите, что $9^{n+1} - 8n - 9$ делится на 16 при всех натуральных n .
- 3.22. Докажите, что $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ делится на 133 при всех натуральных n .
- 3.23. Докажите, что $n(2n^2 - 3n + 1)$ делится на 6 при всех натуральных n .
- 3.24. Докажите, что $n^5 - n$ делится на 5 при всех натуральных n .
- 3.25. Докажите, что $1/(1 \cdot 3) + 1/(3 \cdot 5) + 1/(5 \cdot 7) + \dots + 1/((2n-1)(2n+1)) = n/(2n+1)$ при всех натуральных n .
- 3.26. Докажите, что $6^{2n-1} + 1$ делится на 7 при всех натуральных n .
- 3.27. Докажите, что $9^{n+1} - 8n - 9$ делится на 16 при всех натуральных n .
- 3.28. Докажите, что $1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ при всех натуральных n .
- 3.29. Докажите, что $1 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ при всех натуральных n .
- 3.30. Докажите, что $8^n - 1$ делится на 7 при всех натуральных n .

4. Булевы функции

Упорядоченный набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in \{0, 1\}$, называется *булевым вектором*. Множество $B = \{0, 1\}$ называется *булевым множеством*. Таким образом, B^n - множество всех булевых векторов. Оно является единичным n -мерным кубом.

Функция, определенная на B^n и принимающая значения из множества $\{0, 1\}$, называется *булевой функцией от n переменных*.

Для обозначения булевых функций используют строчные латинские буквы. Пишут: f , $f(\tilde{x})$, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f(x, y)$, $f(x, y, z)$.

Чтобы задать булеву функцию от n переменных достаточно для каждого набора $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ значений аргументов (x_1, x_2, \dots, x_n) указать соответствующее значение функции. Это удобно делать с помощью таблицы, в строках которой перечислены всевозможные булевы вектора длины n и для каждого набора указано значение функции на этом наборе:

x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$
0	0	...	0	0	$f(0, 0, \dots, 0, 0)$
0	0	...	0	1	$f(0, 0, \dots, 0, 1)$
0	0	...	1	0	$f(0, 0, \dots, 1, 0)$
...
1	1	...	1	1	$f(1, 1, \dots, 1, 1)$

Такая таблица называется *таблицей истинности* функции. Булевы вектора в таблице истинности обычно располагают в порядке возрастания их номеров.

Таблицы, задающие булевы функции от одного числа аргументов, отличаются лишь последним столбцом. Поэтому булеву функцию можно также задавать в виде *вектора значений*, который выписывается по правому столбцу ее таблицы истинности. Поскольку таблица содержит 2^n строк (столько, сколько имеется булевых векторов длины n), то

вектор значений булевой функции от n переменных имеет длину 2^n .

Число булевых функций от n переменных равно 2^{2^n} .

Пример 4.1. Ниже функция f от двух переменных задана в виде таблицы истинности и в виде вектора значений.

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$f = (0, 1, 1, 0).$$

То есть, имеем:

$$f(0, 0) = 0, \quad f(0, 1) = 1,$$

$$f(1, 0) = 1, \quad f(1, 1) = 0.$$

Примеры булевых функций

1. *Функции одной переменной.* Их всего 4:

x	(0)	(x)	$(\neg x)$	(1)
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Названия функций:

(0) - константа 0;

(x) - тождественная функция;

$(\neg x)$ - отрицание (читается «не x »), другое обозначение (\bar{x}) ;

(1) - константа 1;

2. *Функции двух переменных.* Всего их 16 штук.

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

x	y	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1

Здесь функции пронумерованы таким образом, что двоичное представление номера функции совпадает с ее вектором значений.

Остановимся подробнее на тех функциях двух переменных, которые используются наиболее часто:

	Обозначение	Название	Прочтение	Представление в виде полинома Жегалкина	Представление через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание
f_1	$(x \wedge y),$ $(x \& y), (x \cdot y)$	<i>конъюнкция</i>	« x и y »	xy	xy
f_6	$(x + y),$ $(x \oplus y)$	<i>сложение по модулю 2</i>	« x плюс y »	$x+y$	$\overline{xy} \vee x\overline{y}$
f_7	$(x \vee y)$	<i>дизъюнкция</i>	« x или y »	$xy + x + y$	$x \vee y$
f_8	$(x \uparrow y)$	<i>стрелка Пирса</i>	«не x или y »	$xy + x + y + 1$	$\overline{x \vee y}$
f_9	$(x \leftrightarrow y)$	<i>эквивалентность</i>	« x эквивалентно y »	$x + y + 1$	$xy \vee \overline{xy}$
f_{13}	$(x \rightarrow y)$	<i>импликация</i>	« x влечет y »	$xy + y + 1$	$\overline{x} \vee y$
f_{14}	$(x y)$	<i>штрих Шеффера</i>	«не x и y »	$xy + 1$	\overline{xy}

Функции (0) , (x) , $(\neg x)$, (1) , (xy) , $(x + y)$, $(x \vee y)$, $(x \uparrow y)$, $(x \leftrightarrow y)$, $(x \rightarrow y)$, $(x|y)$ обычно называют элементарными. Символы, участвующие в их обозначении, называют логическими связками.

Другой способ задания булевой функции – с помощью формулы. Пусть \mathbf{B} – некоторое подмножество булевых функций, X – множество переменных.

Дадим индуктивное определение *формулы над \mathbf{B}* :

1. *Базис индукции.* Каждое выражение вида $f_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где f_0 – символ из \mathbf{B} , $x_i \in X$, является формулой над \mathbf{B} , такие формулы называются *атомарными*;
2. *Индуктивный переход.* Выражение вида $f_0(A_1, A_2, \dots, A_n)$, где A_i – либо символ переменной ($A_i \in X$), либо формула над \mathbf{B} , является формулой над \mathbf{B} .

Вместо каждой переменной формулы можно подставить 0 или 1 (по сути – задать значение $\tilde{\alpha}$ булева вектора переменных). При этом мы сможем вычислить значения атомарных формул как (элементарных) булевых функций по таблице истинности. Заменим в исходной формуле атомарные формулы их значениями на векторе $\tilde{\alpha}$. Теперь по таблице истинности мы сможем вычислить значения тех формул, значения аргументов которых нам известны. Таким образом, мы можем вычислить формулу Φ на любом булевом векторе $\tilde{\alpha}$, составить для нее таблицу истинности, то есть сопоставить ей некоторую булеву функцию f .

Если функция f сопоставлена формуле Φ над \mathbf{B} , то говорят, что *формула Φ реализует функцию f* .

Функцию f , реализуемую формулой над множеством функций $\{f_1, f_2, \dots\}$, будем называть *суперпозицией функций $\{f_1, f_2, \dots\}$* .

Если две формулы Φ_1 и Φ_2 реализуют равные функции, то они называются *равносильными*. Равносильность формул обозначают так: $\Phi_1 = \Phi_2$.

Пример 4.2. Проверьте с помощью таблицы истинности, равносильны ли следующие формулы: $\Phi_1 = ((\neg x_1) \wedge (x_2 \oplus x_1))$, реализующая функцию f_1 , и $\Phi_2 = ((\neg x_1) \wedge x_2)$, реализующая функцию f_2 .

Решение. Зададим с помощью таблицы истинности функцию f_1 , последовательно вычисляя значения на всевозможных булевых векторах значения подформулы $A = (\neg x_1)$, $B = (x_2 \oplus x_1)$ и, наконец, самой формулы Φ_1 . В частности, на булевом векторе $\tilde{\alpha} = (0, 0)$ (ему соответствует первая строка таблицы истинности, т.е. $x_1 = 0, x_2 = 0$) вычисляем $A(\tilde{\alpha}) = (\neg x_1)(\tilde{\alpha}) = \neg 0 = 1$, $B(\tilde{\alpha}) = (x_2 \oplus x_1)(\tilde{\alpha}) = (0 + 0) = 0$ и, наконец, $\Phi_1(\tilde{\alpha}) = A(\tilde{\alpha}) \wedge B(\tilde{\alpha}) = 1 \wedge 0 = 0$; на булевом векторе $\tilde{\beta} = (0, 1)$ (ему соответствует вторая строка таблицы истинности, т.е. $x_1 = 0, x_2 = 1$) вычисляем $A(\tilde{\beta}) = (\neg x_1)(\tilde{\beta}) = \neg 0 = 1$, $B(\tilde{\beta}) = (x_2 \oplus x_1)(\tilde{\beta}) = (0 + 1) = 1$ и $\Phi_1(\tilde{\beta}) = A(\tilde{\beta}) \wedge B(\tilde{\beta}) = 1 \wedge 1 = 1$, и так далее.

x_1	x_2	$(\neg x_1)$	$(x_2 \oplus x_1)$	$\Phi_1 = ((\neg x_1) \wedge (x_2 \oplus x_1))$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

Аналогичным способом зададим таблицей истинности функцию f_2 :

x_1	x_2	$(\overline{x_1})$	$\Phi_2 = ((\neg x_1) \wedge x_2)$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	0

Поскольку векторы значений функций f_1 и f_2 одинаковы (то есть функции равны), реализующие их формулы $((\neg x_1) \wedge (x_2 \oplus x_1))$ и $((\neg x_1) \wedge x_2)$ равносильны.

Для упрощения записи формул введены следующие соглашения:

а) внешние скобки у формул можно опускать;

б) вместо $\neg f$ можно писать \bar{f} , а вместо $f \wedge g$ — $f \cdot g$ или fg ;

в) связку \neg принято считать сильнее любой двуместной связки, поэтому внешние скобки в выражении, над которым стоит знак « \neg », можно опускать;

г) связку \wedge принято считать сильнее \vee и \oplus , поэтому выражения $f \wedge g$, $f \cdot g$, fg можно в скобки не брать.

Т.е. $((\neg(x_1 \wedge x_2)) \rightarrow ((x_1 \vee x_2) \wedge x_3)) = \overline{x_1 x_2} \rightarrow (x_1 \vee x_2) x_3$.

Для формул над множеством $\mathbf{B} = \{0, 1, \wedge, \vee, \neg\}$ имеют место следующие равносильности:

$$1. x \vee y = x \vee y;$$

$$2. x \wedge y = y \wedge x;$$

$$3. x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z;$$

$$4. x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z;$$

$$5. x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z);$$

$$6. x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z);$$

$$7. \overline{x \vee x} = \bar{x};$$

$$9. \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y};$$

$$11. x \vee 0 = x;$$

$$13. x \vee 1 = 1;$$

$$15. x \vee (x \wedge y) = x;$$

$$17. x \wedge \bar{x} = 0;$$

$$19. \overline{\bar{x}} = x.$$

$$8. \overline{x \wedge x} = \bar{x};$$

$$10. \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y};$$

$$12. x \wedge 0 = 0;$$

$$14. x \wedge 1 = x;$$

$$16. x \wedge (x \vee y) = x;$$

$$18. x \vee \bar{x} = 1;$$

Типовые задания по теме «Булевы функции»

Постройте таблицы истинности для формул булевых функций трех переменных $h(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$. Выясните, являются ли эти формулы равносильными.

- 4.1. $h = (x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z, g = x + y + z;$
- 4.2. $h = y(x \leftrightarrow z) + y, g = xy + yz;$
- 4.3. $h = xy \vee yz \vee xz, g = x \uparrow (xy \leftrightarrow z);$
- 4.4. $h = (x \uparrow yz) \neg x, g = x \uparrow y \neg xz;$
- 4.5. $h = x \rightarrow yz, g = (x \rightarrow z) \rightarrow y;$
- 4.6. $h = (x \vee y)(x \vee z), g = x \vee yz;$
- 4.7. $h = (\neg y | z)(\neg y | x), g = \neg y | zx;$
- 4.8. $h = x | yz, g = x | (y | z);$
- 4.9. $h = xy \rightarrow zy, g = xyz \vee (x \rightarrow z);$
- 4.10. $h = x(z \rightarrow y), g = x(x \vee y \vee \neg z);$
- 4.11. $h = xy + yz + y, g = y(x + \neg y + \neg z);$
- 4.12. $h = \neg x \neg y \neg z, g = xyz + xy + xz + yz + 1;$
- 4.13. $h = y(x \rightarrow z), g = xy \rightarrow yz;$
- 4.14. $h = xyz \vee \neg x \neg y \neg z, g = (x \rightarrow y)(y \rightarrow z)(z \rightarrow x);$
- 4.15. $h = x | z, g = (x | y)(y | z);$
- 4.16. $h = xyz \rightarrow z, g = (x \uparrow yz) \vee y;$
- 4.17. $h = \neg(\neg x \neg y \neg z), g = x \vee y \vee z;$
- 4.18. $h = (x \rightarrow yz)(yz \rightarrow x), g = x \leftrightarrow yz;$
- 4.19. $h = xy \neg z, g = (xz + x) y;$
- 4.20. $h = x | z, g = \neg x \neg y \rightarrow yz;$
- 4.21. $h = (x \rightarrow y)(y \rightarrow x), g = x + y + 1;$
- 4.22. $h = x \neg y + \neg xy, g = (x + \neg y)(\neg x + y);$
- 4.23. $h = xy \neg z \vee \neg x \neg yz, g = (x \leftrightarrow y) \leftrightarrow \neg z;$
- 4.24. $h = \neg xz \vee \neg yz, g = (xy + 1)z;$
- 4.25. $h = \neg(\neg x \neg y), g = xy \vee x \vee y \vee yz;$
- 4.26. $h = x + yz, g = x \uparrow xy + z;$
- 4.27. $h = z \vee xy, g = (xy \vee z) + \neg z;$
- 4.28. $h = y | z, g = x \rightarrow \neg xyz;$
- 4.29. $h = x \leftrightarrow y, g = xy \neg z \rightarrow z;$
- 4.30. $h = xyz + 1, g = (x | y) \rightarrow (y \uparrow z).$

5. Совершенные нормальные формы

У булевых функций, как и у многих математических объектов, существуют так называемые *нормальные формы* – унифицированные представления, обеспечивающие существование и единственность.

Литералом называется переменная либо ее отрицание.

В частности, x и $\neg x$ – литералы переменной x .

Конъюнктом (или *элементарной конъюнкцией*) называется конъюнкция литералов, в которую каждая переменная функции входит не более одного раза.

Полным конъюнктом называется элементарная конъюнкция, в которую каждая переменная функции входит *ровно* один раз.

Например, для множества трех переменных $X = \{x, y, z\}$ формулы $x\neg yz$, $\neg x\neg yz$ являются полными конъюнктами, а формулы $x\neg x yz$ и yz – не являются (в первую переменная x входит дважды, во вторую – не входит вообще). Однако, формула yz является элементарной конъюнкцией.

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) – это дизъюнкция элементарных конъюнкций.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) – это дизъюнкция полных конъюнктов.

Дизъюнктом (или *элементарной дизъюнкцией*) называется дизъюнкция литералов, в которую каждая переменная функции входит не более одного раза.

Полным дизъюнктом называется элементарная дизъюнкция, в которую каждая переменная функции входит ровно один раз. Например, для множества трех переменных $X = \{x, y, z\}$ формулы $x \vee \neg y \vee z$, $\neg x \vee \neg y \vee z$ являются полными дизъюнктами.

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ) – это конъюнкция полных дизъюнктов.

Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задана таблицей истинности, то соответствующая ей формула в виде СДНФ может быть получена следующим образом. Для каждой строки таблицы истинности, в которой функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принимает значение 1, записывается полный конъюнкт, причем переменная x_k входит в конъюнкт без отрицания, если значение x_k в рассматриваемой строке таблицы истинности функции f есть 1, и с отрицанием, если значение x_k есть 0. Дизъюнкция всех записанных конъюнктов и будет искомой формулой.

Для построения СКНФ, напротив, выпишем все полные дизъюнкты для всех строк таблицы истинности, в которых функция f принимает значение 0, причем переменная x_k входит в дизъюнкт без

отрицания, если значение x_k в рассматриваемой строке таблицы истинности функции f есть 0, и с отрицанием, если значение x_k есть 1.

Пример 5.1. Запишите СДНФ и СКНФ булевой функции трех переменных $f(x,y,z)$, заданной вектором значений $f = (10100110)$.

Решение. Функция $f(x,y,z)$ имеет следующую таблицу истинности:

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Для наборов значений переменных $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, на которых функция принимает значение 1, запишем конъюнкции $\neg x \neg y \neg z$, $\neg x y \neg z$, $x \neg y z$, $x y \neg z$. Тогда искомая формула, обладающая свойствами совершенства, будет иметь вид:

$$\text{СДНФ}(f) = \neg x \neg y \neg z \vee \neg x y \neg z \vee x \neg y z \vee x y \neg z.$$

Аналогично, для наборов значений переменных $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, на которых функция принимает значение 0, запишем дизъюнкции $\neg x \vee \neg y \vee z$, $\neg x \vee y \vee z$, $x \vee \neg y \vee \neg z$, $x \vee y \vee z$. Выполнив конъюнкцию полных дизъюнктов, получаем:

$$\text{СКНФ}(f) = (\neg x \vee \neg y \vee z) (\neg x \vee y \vee z) (x \vee \neg y \vee \neg z) (x \vee y \vee z).$$

Другой способ получения СДНФ и СКНФ основан на равносильных преобразованиях формулы функции f .

Заметим, что СДНФ константы 0 и СКНФ константы 1 окажутся пустыми.

**Типовые задания по теме
«Совершенные нормальные формы»**

Запишите СДНФ и СКНФ булевой функции трех переменных $f(x,y,z)$, заданной вектором значений.

- 5.1. $f = (01100100)$
- 5.2. $f = (11010101)$
- 5.3. $f = (01101110)$
- 5.4. $f = (01110001)$
- 5.5. $f = (11111100)$
- 5.6. $f = (00011011)$
- 5.7. $f = (11011111)$
- 5.8. $f = (00100010)$
- 5.9. $f = (01001010)$
- 5.10. $f = (01010101)$
- 5.11. $f = (10101010)$
- 5.12. $f = (00100111)$
- 5.13. $f = (11100011)$
- 5.14. $f = (00000110)$
- 5.15. $f = (10101100)$
- 5.16. $f = (00010001)$
- 5.17. $f = (00100110)$
- 5.18. $f = (10010011)$
- 5.19. $f = (11001111)$
- 5.20. $f = (00110001)$
- 5.21. $f = (10000001)$
- 5.22. $f = (01111110)$
- 5.23. $f = (10001110)$
- 5.24. $f = (01110001)$
- 5.25. $f = (00001110)$
- 5.26. $f = (10010010)$
- 5.27. $f = (00110100)$
- 5.28. $f = (11000001)$
- 5.29. $f = (11111011)$
- 5.30. $f = (01000100)$

6. Минимизация булевых функций

Примером задачи минимизации является нахождение минимальной ДНФ функции (МДНФ), то есть ДНФ с минимальным вхождением переменных среди всех ДНФ, реализующих данную функцию. Для этой задачи существуют простые эффективные алгоритмы. Один из них основан на применении карт Карно.

Карта Карно – это двумерная табличная форма представления булевой функции, позволяющая в наглядной графической форме легко отыскать минимальные ДНФ логических функций. Каждой клетке в таблице сопоставляется конъюнкт СДНФ минимизируемой функции, причем так, что любым двум соседним клеткам таблицы соответствуют конъюнкты, отличающиеся лишь знаком одной переменной. В ячейки таблицы вписываются значения из таблицы истинности функции на соответствующих конъюнктах, при этом, если перед соответствующей переменной стоит знак отрицания, то в таблице истинности выбирается строка с ложным значением данной переменной, иначе – с истинным значением.

Например, карта Карно для функции $f(x,y,z)$ трех переменных может выглядеть так:

$f(x,y,z)$	$\neg y\neg z$	$\neg yz$	yz	$y\neg z$
$\neg x$	$f(0,0,0)$	$f(0,0,1)$	$f(0,1,1)$	$f(0,1,0)$
x	$f(1,0,0)$	$f(1,0,1)$	$f(1,1,1)$	$f(1,1,0)$

Для удобства столбцы (и строки) подписаны конъюнкцией переменных, входящих во все полные конъюнкты, соответствующие клеткам этого столбца (строки). Первый и последний столбцы (и строки) в карте Карно также считаются соседними.

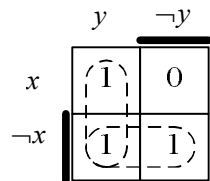
Пример 6.1. Найдите МДНФ импликации $x \rightarrow y$.

Решение. Заполним карту Карно для функции $x \rightarrow y$:

$x \rightarrow y$	y	$\neg y$
x	1	0
$\neg x$	0	1

Все четыре клетки соответствуют всем возможным конъюнкциям СДНФ функции двух переменных. Единичные значения функции показывают те конъюнкты, которые присутствуют в СДНФ этой функции.

Алгоритм поиска минимальной ДНФ по карте Карно основан на выявлении на карте минимального количества максимальных квадратов или прямоугольников со сторонами, равными степени двойки (единичных n -мерных кубов), так, чтобы они состояли только из ячеек, содержащих единицы. Так, для функции двух переменных сначала находим все различные 2-мерные кубы (это весь квадрат 2×2), затем 1-мерные кубы (прямоугольники 1×2 или 2×1), не накрываемые ранее найденными кубами и, наконец, 0-мерные кубы (квадраты 1×1), не накрываемые ранее найденными кубами – таковыми могут быть только одинокие единицы. Для функции трех переменных сначала ведется поиск 3-мерных кубов, затем не покрываемых ими 2-мерных кубов (квадраты 2×2 и прямоугольники 1×4 – не забывайте, что крайние ряды являются соседними!) и т.д. Каждому кубу ставится в соответствие конъюнкция тех координат (переменных или их отрицаний), которые являются общими для всех клеток этого куба. Искомая минимальная ДНФ есть дизъюнкция соответствующих единичным кубам конъюнктов.



В примере с формулой $x \rightarrow y$ мы получили два 1-мерных куба. Первый из них покрывает ячейки с общей координатой $\neg x$, второй – ячейки с общей координатой y , соответственно искомая минимальная ДНФ будет $\neg x \vee y$.

Пример 6.2. Найти МДНФ функции трех переменных $f(x,y,z)$, заданной вектором значений $f = (10100110)$, с помощью карты Карно.

Решение. Заполним карту Карно, пользуясь таблицей истинности функции f , полученной в примере 5.1:

$f(x,y,z)$	$\neg y \neg z$	$\neg y z$	$y z$	$y \neg z$
$\neg x$	1	0	0	1
x	0	1	0	1

На полученной карте нет ни одного 3-мерного куба и даже ни одного 2-мерного куба, состоящего из клеток с единицами. Есть 1-мерный куб в столбце $y \neg z$, и пересекающийся с ним 1-мерный куб в

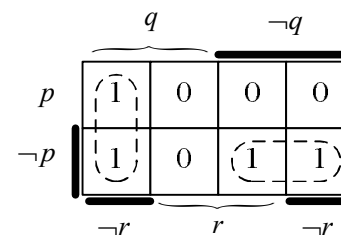
строке $\neg x$ в клетках с общей координатой $\neg z$, в таблице он выглядит разорванным. Наконец, есть четыре 0-мерных куба, но три из них покрываются найденными ранее кубами, и только единица в клетке $x \neg y z$ остается непокрытой. Следовательно, МДНФ(f) = $y \neg z \vee \neg x \neg z \vee x \neg y z$.

Пример 6.3. Найти МДНФ функции трех переменных $f(p,q,r)$, заданной формулой $f = \neg p \vee q \oplus r \wedge q \wedge (p \vee r)$.

Решение. Таблица истинности для данной формулы имеет следующий вид:

p	q	r	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

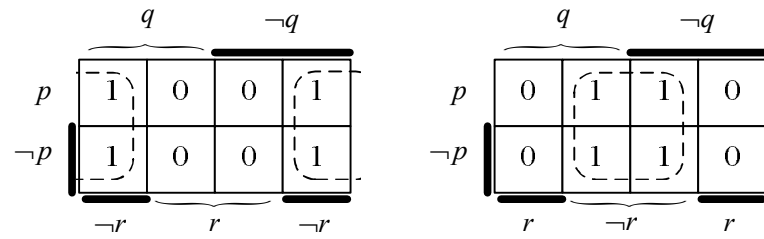
Карта Карно для функции трех переменных должна содержать, очевидно, 8 ячеек. Подобную карту можно изобразить следующим образом:



Для этой карты Карно единичные значения присутствуют в ячейках с координатами $q \wedge \neg r$ и $\neg q \wedge \neg p$, соответственно минимальная ДНФ будет $q \wedge \neg r \vee \neg q \wedge \neg p$.

В силу симметрии карт Карно при построении прямоугольников возможно объединение ячеек, находящихся в крайних позициях, так как при ином расположении координат строк или столбцов (переменных без отрицания и с отрицанием) крайние ячейки

окажутся внутри карты. Следующие две карты Карно эквивалентны (местами поменялись координаты r и $\neg r$) и на них указано корректное объединение ячеек в прямоугольные области:



**Типовые задания по теме
«Минимизация булевых функций»**

Найдите МДНФ функции, заданной вектором значений, с помощью карты Карно.

- 6.1. $f = (01100100)$
- 6.2. $f = (11010101)$
- 6.3. $f = (01101110)$
- 6.4. $f = (01110001)$
- 6.5. $f = (11111100)$
- 6.6. $f = (00011011)$
- 6.7. $f = (11011111)$
- 6.8. $f = (00100010)$
- 6.9. $f = (01001010)$
- 6.10. $f = (01010101)$
- 6.11. $f = (10101010)$
- 6.12. $f = (00100111)$
- 6.13. $f = (11100011)$
- 6.14. $f = (00000110)$
- 6.15. $f = (10101100)$
- 6.16. $f = (00010001)$
- 6.17. $f = (00100110)$
- 6.18. $f = (10010011)$
- 6.19. $f = (11001111)$
- 6.20. $f = (00110001)$
- 6.21. $f = (10000001)$
- 6.22. $f = (01111110)$
- 6.23. $f = (10001110)$
- 6.24. $f = (01110001)$
- 6.25. $f = (00001110)$
- 6.26. $f = (10010010)$
- 6.27. $f = (00110100)$
- 6.28. $f = (11000001)$
- 6.29. $f = (11111011)$
- 6.30. $f = (01000100)$

7. Полные системы булевых функций

Множество булевых функций $\mathbf{B} = \{f_1, f_2, \dots, f_m, \dots\}$ называется *полной системой*, если любая булева функция может быть реализована формулой над \mathbf{B} .

Говорят, что булева функция сохраняет 0, если $f(0, 0, \dots, 0) = 0$.

Обозначим через \mathbf{T}_0 множество всех булевых функций, сохраняющих 0.

Примерами булевых функций, сохраняющих 0, являются конъюнкция и дизъюнкция, а импликация и стрелка Пирса не сохраняют 0 (см. таблицу истинности функций двух переменных в 4 главе).

Говорят, что булева функция сохраняет 1, если $f(1, 1, \dots, 1) = 1$.

Обозначим через \mathbf{T}_1 множество всех булевых функций, сохраняющих 1.

Примерами булевых функций, сохраняющих 1, являются конъюнкция, дизъюнкция и импликация, а эквивалентность и стрелка Пирса не сохраняют 1 (см. таблицу истинности функций двух переменных в 4 главе).

Булева функция $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется двойственной к функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \neg x_2, \dots, \neg x_n)$. При этом таблицу истинности функции f^* можно получить, отразив относительно середины столбец значений функции f и инвертировав сами значения (0 превратится в 1, а 1 – в 0).

Пример 7.1. Функция трех переменных $f(x, y, z)$, задана вектором значений $f = (10100110)$. Найдите двойственную к ней функцию f^* .

Решение запишем с помощью таблицы истинности:

x	y	z	$f(x,y,z)$	$f(\neg x, \neg y, \neg z)$	$f^*(x,y,z)$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0

Столбец значений функции $f(-x, -y, -z)$ получен симметричным отражением столбца значений исходной функции. Ответ, после инверсии значений функции, получаем в последнем столбце.

Говорят, что булева функция f *самодвойственная*, если $f = f^*$.

Обозначим через $\mathbf{S}(n)$ множество самодвойственных функций от n переменных, а через \mathbf{S} – множество всех самодвойственных функций.

Примерами самодвойственных булевых функций являются тождественная функция и отрицание. Конъюнкция, дизъюнкция и вообще все функции с различным количеством нулей и единиц в векторе значений самодвойственными не являются. Эквивалентность и функция $f = (10100110)$ из предыдущего примера имеют разное количество нулей и единиц в столбце значений, однако также не самодвойственны, что легко проверяется по таблице истинности.

Если для любого i $\alpha_i \leq \beta_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то говорят, что вектор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ *предшествует* вектору $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ и пишут $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$.

Например, $(0, 1, 0, 1) \leq (1, 1, 0, 1)$; $(0, 0, 1, 0) \not\leq (1, 1, 0, 1)$.

Говорят, что булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *монотонна*, если для любых наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ значений переменных, таких что $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$, выполняется неравенство $f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta})$.

Обозначим через \mathbf{M} множество всех монотонных функций.

Примерами монотонных функций являются конъюнкция и дизъюнкция. Импликация, очевидно, не монотонна, поскольку ее значение на векторе $(1, 0)$ меньше значения на векторе $(0, 0)$, предшествующем вектору $(1, 0)$. Функция $f = (10100110)$ также не монотонна: вектор $(1, 0, 0)$ предшествует вектору $(1, 0, 1)$, но $f(1, 0, 0) = 1 > 0 = f(1, 0, 1)$.

Каждую булеву функцию единственным образом можно представить полиномом Жегалкина, то есть записать в виде суммы (по модулю 2) одночленов. Здесь одночлен – это конъюнкция нескольких переменных (без отрицания!) или константа 1.

Пример 7.2. Представьте в виде полинома Жегалкина функцию $f(x, y, z)$, заданную вектором значений $f = (10100110)$.

Решение. Мы уже выписали в примере 6.2 МДНФ(f) = $y \neg z \vee \neg x \neg z \vee x \neg yz$. Проведем следующую цепочку преобразований получен-

ной формулы: сначала используем равносильность $u \vee v = uv + u + v$ для каждой дизъюнкции в формуле, а затем – равносильность $\neg u = u + 1$ в получившейся формуле (обе эти равносильности можно легко проверить по таблице истинности). После чего для получения полинома Жегалкина нам останется лишь раскрыть скобки и привести подобные, используя равносильности из 4 главы.

$$\begin{aligned} \text{Итак, } f(x, y, z) &= (y \neg z \vee x \neg y z) \vee \neg x \neg z = (y \neg z x \neg y z + y \neg z + x \neg y z) \vee \neg x \neg z = \\ &= (0 + y \neg z + x \neg y z) \vee \neg x \neg z = (y \neg z + x \neg y z) \vee \neg x \neg z = (y \neg z + x \neg y z) \neg x \neg z + \\ &+ y \neg z + x \neg y z + \neg x \neg z = y \neg z \neg x \neg z + x \neg y z \neg x \neg z + y \neg z + x \neg y z + \neg x \neg z = \\ &= \neg x y \neg z + 0 + y \neg z + x \neg y z + \neg x \neg z = (x + 1) y (z + 1) + y (z + 1) + x (y + 1) z + (x + 1) (z + 1) = \\ &= xyz + xy + yz + x + yz + y + xyz + xz + xz + x + z + 1 = xy + y + z + 1. \end{aligned}$$

Обозначим через \mathbf{L} множество всех линейных булевых функций, то есть функций, полином Жегалкина которых – первой или нулевой степени.

Примерами линейных функций являются сложение по модулю 2, отрицание и эквивалентность, а дизъюнкция и импликация – нелинейны. В этом несложно убедиться, сверившись с таблицей из главы 4. Наша функция $f = (10100110)$, как мы только что выяснили, представима в виде полинома Жегалкина второй степени, то есть также нелинейна.

Классы \mathbf{T}_0 , \mathbf{T}_1 , \mathbf{S} , \mathbf{M} , \mathbf{L} называют классами Поста.

Утверждение. Классы Поста неполны и попарно различны.

Теорема Поста. Для того чтобы система функций \mathbf{B} была полна, необходимо и достаточно, чтобы множество \mathbf{B} не являлось подмножеством ни одного из классов Поста.

Пример 7.3. Выясните, является ли класс булевых функций $A = \{0, 1, \bar{x}\}$ полным по теореме Поста.

Решение. Чтобы проверить выполнение условий теоремы Поста, составим таблицу, столбцы которой соответствуют классам \mathbf{T}_0 , \mathbf{T}_1 , \mathbf{S} , \mathbf{M} , \mathbf{L} , строки – функциям $0, 1, \bar{x}$, а в клетках проставляется «+» или «-» в зависимости от того, принадлежит ли функция соответствующему классу или не принадлежит. В этом нам помогут таблицы истинности всех трех булевых функций:

x	(0)	$(\neg x)$	(1)
0	0	1	1
1	0	0	1

Как видно, классу \mathbf{T}_0 принадлежит лишь константа 0 (см. верхнюю строчку таблицы истинности), классу \mathbf{T}_1 - лишь константа 1 (см. нижнюю строчку таблицы истинности). Обе константы несамодвойственны (хотя бы потому, что в столбцах значений каждой из них количество единиц и количество нулей не совпадают), а вот \bar{x} является самодвойственной. Действительно, вектор ее значений (10). Отразив его относительно середины, получаем (01). Инвертировав значения (0 в 1 и 1 в 0) получим (10), что совпадает с вектором значений \bar{x} . Обе константы монотонны, а \bar{x} , очевидно, нет. Наконец, все три функции линейны: константы 0 и 1 уже представлены полиномами Жегалкина нулевой степени, а $\bar{x} = x + 1$, то есть реализуется полиномом Жегалкина первой степени. Итак, таблица заполнена:

	\mathbf{T}_0	\mathbf{T}_1	\mathbf{S}	\mathbf{M}	\mathbf{L}
0	+	-	-	+	+
1	-	+	-	+	+
\bar{x}	-	-	+	-	+

Из теоремы Поста следует, что система функций полна тогда и только тогда, когда в каждом столбце построенной нами таблицы есть минус. Но в данном случае есть столбец, содержащий одни плюсы: все функции системы \mathbf{A} линейны. Следовательно, система функций \mathbf{A} неполна.

Пример 7.4. Выясните, является ли класс булевых функций $\mathbf{D} = \{f(x, y, z), x + y\}$ полным по теореме Поста. Функция $f(x, y, z)$ задана вектором значений $f = (10100110)$.

Решение. И вновь заполним таблицу, в которой укажем, каким классам принадлежит каждая из функций системы \mathbf{D} . Про функцию f ранее мы выяснили, что она не является ни самодвойственной, ни монотонной, ни линейной. Поскольку $f(0, 0, 0) = 1$, то она не сохраняет ноль. Так как $f(1, 1, 1) = 0$, единицу она также не сохраняет. Теперь обратимся к сложению по модулю 2. Оно сохраняет ноль (поскольку $0 + 0 = 0$) и не сохраняет единицу (т.к. $1 + 1 = 0$). Оно линейно, т.к. реализуется полиномом Жегалкина первой степени. Оно немонотонно: вектор (1,0) предшествует вектору (1,1), но $1 + 0 = 1 > 0 = 1 + 1$. Наконец, оно несамодвойственно.

	T₀	T₁	S	M	L
$f(x, y, z)$	-	-	-	-	-
$x + y$	+	-	-	-	+

В каждом столбце таблицы есть минус. Следовательно, по теореме Поста класс булевых функций **D** полон. Обратите внимание, что класс, содержащий единственную функцию $f = (10100110)$ уже был бы полон.

Типовые задания по теме «Полные системы булевых функций»

Выясните, является ли класс булевых функций $D = \{f(x, y, z), g(x, y, z)\}$ полным по теореме Поста. Функция $f(x, y, z)$ задана вектором значений, функция $g(x, y, z)$ задана формулой.

- 7.1. $f = (01100100)$, $g = x + y + z$;
- 7.2. $f = (11010101)$, $g = xy + yz$;
- 7.3. $f = (01101110)$, $g = x \uparrow (xy \leftrightarrow z)$;
- 7.4. $f = (01110001)$, $g = x \uparrow y \neg xz$;
- 7.5. $f = (11111100)$, $g = (x \rightarrow z) \rightarrow y$;
- 7.6. $f = (00011011)$, $g = x \vee yz$;
- 7.7. $f = (11011111)$, $g = \neg y \mid zx$;
- 7.8. $f = (00100010)$, $g = x \mid (y \mid z)$;
- 7.9. $f = (01001010)$, $g = xyz \vee (x \rightarrow z)$;
- 7.10. $f = (01010101)$, $g = x (x \vee y \vee \neg z)$;
- 7.11. $f = (10101010)$, $g = y (x + \neg y + \neg z)$;
- 7.12. $f = (00100111)$, $g = xyz + xy + xz + yz + 1$;
- 7.13. $f = (11100011)$, $g = xy \rightarrow yz$;
- 7.14. $f = (00000110)$, $g = (x \rightarrow y) (y \rightarrow z) (z \rightarrow x)$;
- 7.15. $f = (10101100)$, $g = (x \mid y) (y \mid z)$;
- 7.16. $f = (00010001)$, $g = (x \uparrow yz) \vee y$;
- 7.17. $f = (00100110)$, $g = x \vee y \vee z$;
- 7.18. $f = (10010011)$, $g = x \leftrightarrow yz$;
- 7.19. $f = (11001111)$, $g = (xz + x) y$;
- 7.20. $f = (00110001)$, $g = \neg x \neg y \rightarrow yz$;
- 7.21. $f = (10000001)$, $g = x + y + 1$;
- 7.22. $f = (01111110)$, $g = (x + \neg y)(\neg x + y)$;
- 7.23. $f = (10001110)$, $g = (x \leftrightarrow y) \leftrightarrow \neg z$;
- 7.24. $f = (01110001)$, $g = (xy + 1) z$;
- 7.25. $f = (00001110)$, $g = xy \vee x \vee y \vee yz$;
- 7.26. $f = (10010010)$, $g = x \uparrow xy + z$;
- 7.27. $f = (00110100)$, $g = (xy \vee z) + \neg z$;
- 7.28. $f = (11000001)$, $g = x \rightarrow \neg xyz$;
- 7.29. $f = (11111011)$, $g = xy \neg z \rightarrow z$;
- 7.30. $f = (01000100)$, $g = (x \mid y) \rightarrow (y \uparrow z)$.

8. Комбинаторика

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n называется *факториалом* и обозначается $n!$:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n, \quad 0! = 1$$

При решении комбинаторных задач часто используются следующие правила комбинаторики:

1. *Правило суммы.* Если объект A может быть выбран n способами, а объект B другими m способами, то выбор «либо A , либо B » может быть осуществлен $n+m$ способами.
2. *Правило произведения.* Если объект A может быть выбран n способами и после каждого из таких выборов объект B в свою очередь может быть выбран m способами, то выбор « A и B » в указанном порядке может быть осуществлен $n \cdot m$ способами.

Набор элементов $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ из множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ называется *выборкой* объема k из n элементов или (n, k) -выборкой.

Выборка называется *упорядоченной (или размещением)*, если порядок следования элементов в ней задан. Две упорядоченные выборки, различающиеся лишь порядком следования элементов, считаются различными.

Если порядок следования элементов не является существенным, то выборка называется *неупорядоченной (или сочетанием)*.

Размещения обозначаются большой латинской буквой A , сочетания – большой латинской буквой C , но допустимы и альтернативные варианты обозначений.

В выборках могут допускаться или не допускаться повторения элементов. Возможность повторений обозначается горизонтальной чертой над символом выборки.

Количество размещений объёма k из n различных элементов с повторениями: $\overline{A}_n^k = n^k$

Количество размещений объёма k из n различных элементов без повторений:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Перестановка элементов из n -элементного множества X – это размещение элементов из X объёма n .

Количество перестановок из n различных элементов: $A_n^n = P_n = n!$

Если n элементов содержат q_i элементов i -го сорта, $q_1 + q_2 + \dots + q_m = n$ и элементы одного сорта идентичны, то число перестановок равно:

$$P_n(q_1, q_2, \dots, q_m) = \frac{n!}{q_1!q_2!\dots q_m!}$$

Количество сочетаний объёма k из n различных элементов без повторений:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Количество сочетаний объёма k из n различных элементов с повторениями:

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Пример 8.1. Каково количество различных исходов тиража лотереи «Спортлото 5 из 36».

Решение. В процессе тиража лотереи «Спортлото» из 36 шаров с различными номерами выбирается 5 шаров. Для участника лотереи важно лишь, какие шары были выбраны, и не важен порядок, в котором они были выбраны. Следовательно, для решения данной задачи применяем неупорядоченную выборку (сочетания). Поскольку шар с тем же самым номером в барабан не возвращается и не может быть выбран повторно, данная выборка не содержит повторений. Итак, общее число исходов тиража находится по формуле сочетаний без посторонних, 5 из 36:

$$C_{36}^5 = \frac{36!}{5!31!} = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 376992.$$

Пример 8.2. Шеф хочет уволить за неделю (5 рабочих дней) четырех своих сотрудников. Сколькими различными способами он может это сделать?

Решение. Посчитаем количество всех различных списков увольнения. Для этого напротив фамилии каждого сотрудника выпишем день недели – один из пяти (с понедельника по пятницу). Всего придется написать 4 дня, для каждого из сотрудников. То есть мы выбираем из 5

дней недели 4 раза. Порядок важен, поскольку ситуация, когда Иванова уволят в понедельник, а Петрова – во вторник, отличается от ситуации, когда Иванова уволят во вторник, а Петрова – понедельник. Значит, речь идет об упорядоченных выборках. Повторения также возможны, поскольку и Иванова, и Петрова можно уволить в понедельник. Таким образом, число различных списков совпадает с числом размещений с повторениями из 5 элементов по 4:

$$\overline{A}_5^4 = 5^4 = 625.$$

Пример 8.3. Шеф хочет уволить за неделю (5 рабочих дней) четырех своих сотрудников, причем всех – в разные дни. Сколькими различными способами он может это сделать?

Решение. Ситуация идентична предыдущей задаче за исключением того, что нельзя поставить в соответствие двум различным сотрудникам один и тот же день. Следовательно, число различных списков совпадает с числом размещений без повторений из 5 элементов по 4:

$$A_5^4 = \frac{5!}{1!} = 120.$$

Типовые задания по теме «Комбинаторика»

- 8.1. В скачках участвуют 12 лошадей. Букмекер принимает ставки на призовые тройки лошадей. Сколько вариантов ему придется рассмотреть?
- 8.2. В скачках участвуют 11 лошадей. Букмекер принимает ставки на призовые тройки лошадей. Сколько вариантов ему придется рассмотреть, если для получения выигрыша достаточно указать лошадей, пришедших первыми, в произвольном порядке?
- 8.3. Электронное табло состоит из 1000 лампочек. Сколько различных рисунков можно изобразить на этом табло?
- 8.4. В ряд выложены 9 белых шаров. Сколько существует способов покрасить 5 из них в черный цвет?
- 8.5. В ряд выложены 8 белых шаров. Сколько существует способов покрасить 4 из них в различные цвета?
- 8.6. В ряд стоят 8 солдат. Сколькими способами можно отправить их в наряд, если каждого солдата можно отправить на кухню, в уборную, на пост, или никуда не отправлять?
- 8.7. Найдите количество способов составить поезд из 8 пронумерованных пассажирских вагонов, используя все вагоны.
- 8.8. Найдите количество способов составить поезд из 8 пронумерованных (числами от 1 до 8) пассажирских вагонов, используя все вагоны, чтобы первые три вагона имели номера 1,2,3 соответственно.
- 8.9. Найдите количество способов составить поезд из 8 пронумерованных пассажирских вагонов, чтобы нумерация вагонов шла в порядке возрастания. Часть вагонов можно не использовать.
- 8.10. Найдите количество способов разложить 11 апельсинов в подарки 5 детям. Апельсины одинаковые, дети – разные!
- 8.11. В лифт 9-этажного дома на 1 этаже вошло 6 человек. Найдите количество способов им выйти из лифта, если никто не вышел ниже третьего этажа?
- 8.12. В лифт 10-этажного дома на 1 этаже вошло 5 человек. Найдите количество способов им выйти из лифта, если никто не вышел ниже третьего этажа, и все вышли на разных?
- 8.13. Хулиган Вася зашел в подъезд 12-этажного дома с 7 петардами и взорвал каждую из них на площадке какого-нибудь этажа около лифта. Сколькими способами Вася мог это сделать, если ни на одном этаже не было взорвано более одной петарды? Все петарды одинаковые.
- 8.14. Хулиган Вася зашел в подъезд 10-этажного дома с 8 петардами и взорвал каждую из них на площадке какого-нибудь этажа около

лифта. Сколькими способами Вася мог это сделать? Все петарды одинаковые.

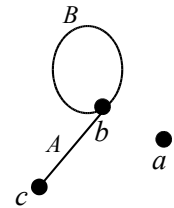
- 8.15. У ребенка есть 7 карточек с различными буквами. Сколько слов (даже бессмысленных) он сможет составить?
- 8.16. У ребенка есть 5 карточек с различными буквами и две карточки – с одной и той же буквой «А». Сколько слов (даже бессмысленных) он сможет составить?
- 8.17. У ребенка есть 7 карточек: 4 с буквами «А» и 3 с буквами «М». Сколько слов (даже бессмысленных) он сможет составить?
- 8.18. Сколько существует в Омске шестизначных телефонных номеров, все цифры в которых нечетны?
- 8.19. Инспектор ГИБДД решил, что будет останавливать каждую машину, если он ранее не останавливал автомобиль с теми же тремя цифрами в номере (неважно, в каком порядке). Сколько машин ему придется остановить?
- 8.20. Инспектор ГИБДД решил, что будет останавливать каждую машину, все цифры в номере которой различны, если он ранее не останавливал автомобиль с теми же тремя цифрами в номере (неважно, в каком порядке). Сколько машин ему придется остановить?
- 8.21. Найдите количество различных наборов из 6 карт в руке карточного игрока «в дурака». В колоде 36 карт.
- 8.22. На пути автомобиля – 10 светофоров. Автомобиль либо останавливается на красный свет, либо проезжает светофор на зеленый цвет без остановки. Каково число способов проехать этот путь?
- 8.23. Сколькими способами победитель "Поля чудес" может выбрать четыре приза из 20 имеющихся?
- 8.24. У каждого человека по 32 гнезда для зубов. Сколько разных наборов зубов может быть у человека (зуб или есть, или нет)?
- 8.25. Сколькими способами можно из 30 участников собрания выбрать председателя, заместителя председателя и секретаря?
- 8.26. В русском языке 33 буквы. Сколько трехбуквенных слов (не обязательно осмысленных) можно составить?
- 8.27. Сколько сторон и диагоналей у 100-угольника?
- 8.28. Есть 8 разных конфет. Сколькими способами можно раздать их по одной 8 студенткам?
- 8.29. В марсианском домино на костяшках стоят числа от 1 до 13. Сколько в марсианском домино костяшек?
- 8.30. Инспектор ГИБДД решил, что будет останавливать каждую машину, в номере которой все цифры четны и различны, если он ранее не останавливал автомобиль с тем же трехзначным числом в номере. Сколько машин ему придется остановить?

9. Элементы теории графов

Граф – это пара множеств $G = (V, E)$, где E – отношение на множестве V .

Элементы множества V и E называют соответственно *вершинами* и *ребрами*. Количество вершин графа будем обозначать буквой n , количество ребер – буквой m .

Пример 9.1. $G = (V, E): V = \{a, b, c\}$,
 $E = \{A, B\}$, $A=bc$, $B=bb$ (обозначение отношения E в графе при описании ребер обычно опускается, в частности, $A=bc$ означает в терминах отношений, что $A=(b, c) \in E$, или aEb).

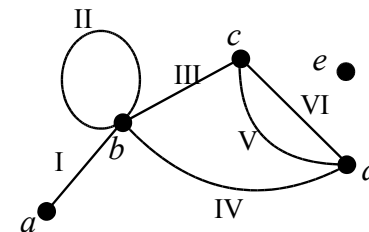


Граф удобно представлять в виде диаграмм, на которых вершинам соответствуют помеченные точки плоскости, а ребрам – помеченные непрерывные кривые, соединяющие эти точки. Так, граф из примера 1 можно представить диаграммой, изображенной на рисунке.

Если $e = ab$ – некоторое ребро данного графа, то вершины a , b называются *смежными*; говорят также, что a , b – *концевые* вершины ребра e . Ребра e_1 и e_2 называются *смежными*, если они имеют общую концевую вершину. Если a – концевая вершина ребра e , то ребро e и вершина a называются *инцидентными*. Ребро, соединяющее вершину саму с собой, называется *петлей*.

Число ребер, инцидентных вершине a , (петля учитывается дважды) называется *степенью* вершины и обозначается $\deg a$. Если $\deg a = 0$, то вершина a называется *изолированной*. Если $\deg a = 1$, то вершина a называется *висячей*. Ребро, инцидентное висячей вершине, называется *висячим*.

Пример 9.2. Пусть $V = \{a, b, c, d, e\}$, а
 $E = \{I, II, III, IV, V, VI\}$, $I=ab$, $II=bb$, $III=bc$, $IV=bd$, $V=VI=cd$. Для



наглядности представим граф диаграммой.

Вершины a , b – концы ребра I. Ребра V, VI – кратные. Вершины c и d – смежные. Вершина c инцидентна ребрам III, V, VI.

$\deg a = 1$, $\deg b = 5$, $\deg c = 3$, $\deg d = 3$, $\deg e = 0$. Вершина a – висячая, ребро I – висячее, вершина e – изолированная.

Лемма 9.1 (о рукопожатиях). Для любого графа G сумма степеней вершин равна удвоенному числу ребер, т.е.

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2m.$$

Доказательство. При подсчете суммы степеней вершин произвольное ребро e ($e = v_1 v_2$) внесет вклад, равный 1, как в степень вершины v_1 , так и в степень вершины v_2 , т.е. будет учтено в сумме дважды.

Следствие. В любом графе G число вершин нечетной степени четно.

Пример 9.3. Бабушка, чтобы повесить белье, привязала к гвоздикам веревки. К трем гвоздикам она привязала по 5 веревок, к четырем – по три веревки, и еще к одному гвоздику – одну веревку. Сколько всего веревок для сушки белья натянула бабушка?

Решение. Пусть гвоздики – это вершины графа, а веревки – ребра. Тогда количество веревок, привязанных к гвоздику, соответствует степени вершины в графе. Имеем 3 вершины степени 5, 4 – степени 3, и одну вершину степени 1. По лемме о рукопожатиях Суммарная степень всех вершин графа равна удвоенному числу ребер. То есть $3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 2m$, где m – количество ребер в графе, то есть веревок. Решая уравнение, находим $m = 14$.

Заметим, что если бы сумма в левой части уравнения оказалась нечетной, мы бы не смогли отыскать количество ребер: в этом случае следствие из леммы о рукопожатиях позволяет сделать вывод, что требуемый граф не существует.

Маршрутом длины k на графе G называется такая последовательность $v_0 e_1 v_1 \dots v_{k-1} e_k v_k$ вершин и ребер графа, в которой $e_i = v_{i-1} v_i$ ($1 \leq i \leq k$).

Такой маршрут кратко называют $\langle v_0, v_k \rangle$ -маршрутом и говорят, что он соединяет вершину v_0 с вершиной v_k . Вершины v_0 и v_k называют соответственно началом и концом маршрута.

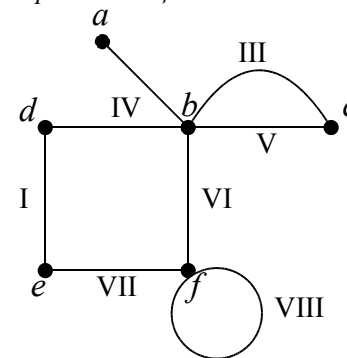
Если $v_0 = v_k$, то маршрут называется *замкнутым*.

В обыкновенном графе маршрут полностью определяется последовательностью v_0, v_1, \dots, v_k своих вершин.

В произвольном маршруте любое ребро и любая вершина могут повторяться.

Цепь – это маршрут без повторяющихся ребер. Цепь называется *простой*, если в ней нет повторяющихся вершин за исключением, быть может, совпадающих конечных. Замкнутая цепь называется *циклом*. Замкнутая простая цепь называется *простым циклом*.

Пример 9.4. Дан граф G (см. рис. справа); a II b III c V b VI f – $\langle a, f \rangle$ -маршрут; его длина равна 4; данный маршрут является $\langle a, f \rangle$ -цепью; эта цепь незамкнутая, не простая. Маршрут f VII e I d IV b VI f VIII f – цикл длины 5, этот цикл не является простым; b III c V b – простой цикл.



Лемма 9.2. Если для некоторых вершин a и b на графе G существует $\langle a, b \rangle$ -маршрут, то существует и простая $\langle a, b \rangle$ -цепь.

Граф называется *связным*, если любые две вершины соединены простой цепью.

Граф называется *ациклическим*, если в нем нет циклов.

Ациклический связный граф называется *деревом*.

В частности, граф G из примера 9.4 связный, но содержит циклы, и поэтому не является деревом.

Лемма 9.3. В дереве число вершин на 1 больше числа ребер, т.е. $n = t + 1$.

Расстоянием $\delta(u, v)$ между двумя вершинами u и v в графе называется длина кратчайшей $\langle u, v \rangle$ -цепи, а сама кратчайшая цепь называется *геодезической*. Если $\langle u, v \rangle$ -цепи не существует, то $\delta(u, v)$ полагается равным бесконечности.

Диаметром графа $D(G)$ называется длина длиннейшей геодезической в графе, то есть расстояние между наиболее удаленными вершинами.

Эксцентриситетом $\varepsilon(v)$ вершины v в связном графе G называется расстояние от вершины v до самой удаленной от нее вершины графа. Таким образом, диаметр графа – наибольший из эксцентриситетов вершин.

Радиусом графа $R(G)$ называется наименьший из эксцентриситетов вершин. Вершины, обладающие таким эксцентриситетом, называются *центральными*. Множество всех центральных вершин называется *центром графа* и обозначается $C(G)$.

Пример 10.3. Найти эксцентриситеты всех вершин графа из примера 10.1, найти радиус, диаметр и центр этого графа.

Решение. От вершины a наиболее удаленной является вершина e : геодезическая $abfe$ (можно также взять $abce$ в качестве кратчайшего $\langle a, e \rangle$ -пути) содержит три ребра. Расстояния до прочих вершин не превосходят двух. Следовательно, $\varepsilon(a) = 3$.

От вершины b также наиболее удалена вершина e : по геодезической bfe расстояние $\delta(b, e) = 2$. Расстояние от b до остальных вершин составляет $1 < 2$, поэтому $\varepsilon(b) = 2$.

По аналогии находим $\varepsilon(c) = \varepsilon(e) = \varepsilon(a) = 3$, $\varepsilon(f) = \varepsilon(d) = \varepsilon(b) = 2$. Итак, диаметр графа равен трем (наибольший эксцентриситет), а радиус графа равен двум (наименьший эксцентриситет). Наконец, в центре графа лежат три вершины b, d, f .

Типовые задания по теме «Элементы теории графов»

Найдите эксцентриситет всех вершин графа $G=(E, V)$, а также радиус, диаметр и центр графа G . Укажите также геодезическую между вершинами a и f .

- 9.1. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ab, bh, cd, ch, de, df, ef, eh, fg\}$.
- 9.2. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ab, ag, cd, ch, de, df, ef, eh, fg, fh\}$.
- 9.3. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ab, ag, ah, ch, de, df, ef, eh, fg, fh\}$.
- 9.4. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ab, ag, ah, bc, de, df, ef, eh, fh\}$.
- 9.5. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ab, ag, ah, bc, bh, df, ef, eh, fg, fh\}$.
- 9.6. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ac, ag, ah, bc, bh, cd, ef, eh, fg\}$.
- 9.7. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ac, ag, ah, bc, bh, cd, ch, eh, fg, gh\}$.
- 9.8. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ac, ah, bc, bh, cd, ch, de, df, gh\}$.
- 9.9. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ag, ah, bc, bh, cd, ch, de, df, ef\}$.
- 9.10. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ah, bc, bh, cd, ch, de, df, fg, gh\}$.
- 9.11. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ac, bh, ce, ch, de, df, ef, eh, fg, gh\}$.
- 9.12. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ac, af, ce, ch, de, df, ef, eh, gh\}$.
- 9.13. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ac, af, ah, ch, de, df, ef, eh, fg, gh\}$.
- 9.14. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ac, af, ah, bc, de, df, ef, eh, fg\}$.
- 9.15. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ac, af, ah, bc, bh, df, ef, eh, fg, gh\}$.
- 9.16. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ab, bf, cd, de, ef, eg, fg, fh, gh\}$.
- 9.17. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ab, ac, cd, de, ef, eg, fg, fh, gh\}$.
- 9.18. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ab, ac, ad, de, ef, eg, fg, fh, gh\}$.
- 9.19. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ab, ac, ad, bd, de, eg, fg, fh, gh\}$.
- 9.20. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ab, ac, ad, bd, bf, eg, fg, fh, gh\}$.
- 9.21. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ab, ac, ae, bd, bh, cd, fg, fh, gh\}$.
- 9.22. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ab, ac, ae, bd, bh, cd, de, fh, gh\}$.
- 9.23. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ab, ac, ae, bd, bh, cd, de, ef, gh\}$.
- 9.24. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ab, ac, ae, bd, bh, cd, de, ef, eg\}$.
- 9.25. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ac, ae, bd, cd, de, ef, eg, fg, fh\}$.
- 9.26. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ab, ac, bd, bh, cg, ef, eg, eh, gh\}$.
- 9.27. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ab, ae, bd, bh, de, ef, eg, eh, gh\}$.
- 9.28. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ab, ae, bd, bh, cg, ef, eg, eh, gh\}$.
- 9.29. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ac, ae, bd, bh, cg, de, eg, eh, fh\}$.
- 9.30. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ab, ac, bd, cg, de, ef, eh, fh, gh\}$.

10. Отыскание минимального остова

Дерево, полученное из связного графа G удалением нескольких ребер, называется остовным деревом, или просто остовом графа G . Ациклический граф, полученный из графа G удалением нескольких ребер, называется *остовным подграфом* графа G .

Взвешенным графом будем называть граф, на множестве ребер E которого задана функция $\rho : E \rightarrow [0; +\infty)$, называемая *весовой*.

Число $\rho(e)$ называется *весом ребра e* , число $\rho(G) = \sum_{e \in E} \rho(e)$ – *весом графа G* .

Остов T связного взвешенного графа G назовем *минимальным остовом*, если для любого другого его остова \tilde{T} выполнено неравенство $\rho(T) \leq \rho(\tilde{T})$.

Рассмотрим задачу о нахождении минимального остова в связном взвешенном графе.

Теорема (алгоритм Краскала). Пусть $G = (V, E, f, \rho)$ – связный взвешенный граф. $\{T_k\}$ – последовательность его остовных подграфов, заданная индуктивно следующим образом:

1. T_0 – остовный подграф, множество E_0 ребер которого пусто.

2. Пусть T_{k-1} ($k \geq 1$) – остовный подграф с множеством ребер $E_{k-1} = \{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}\}$. Тогда T_k – остовный подграф с множеством ребер $E_k = E_{k-1} \cup \{e_k\}$, где ребро e_k выбирается из множества $E \setminus E_{k-1}$ так, что выполнены два условия: а) добавление ребра e_k не приводит к образованию циклов; б) из ребер, удовлетворяющих условию а), ребро e_k обладает наименьшим весом.

Другими словами, на каждом шаге добавляем к остовному подграфу ребро минимального веса, не приводящее к образованию цикла.

Тогда последним элементом последовательности $\{T_k\}$ является минимальный остов графа G .

Пример 10.1. Построить остов минимального веса графа G с множеством вершин $V = \{a, b, c, d, e, g\}$; множеством ребер $E = \{I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX\}$, где $I=ab$, $II=ac$, $III=bd$, $IV=bc$, $V=dc$, $VI=ec$, $VII=ed$, $VIII=dg$, $IX=ee$, и весовым отображением $\rho(I) = 2$, $\rho(II) = 6$, $\rho(III) = 8$, $\rho(IV) = 4$, $\rho(V) = 7$, $\rho(VI) = 2$, $\rho(VII) = 3$, $\rho(VIII) = 1$.

Решение: упорядочим для удобства ребра в порядке возрастания весов, получим последовательность $(VIII, I, VI, VII, IX, IV, II, V, III)$.

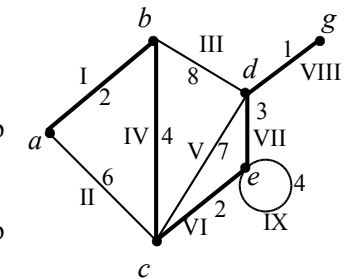
Согласно алгоритму Краскала строим последовательность остовных подграфов:

T_0 с пустым множеством ребер;

T_1 с множеством ребер $\{VIII\}$;

T_2 с множеством ребер $\{VIII, I\}$;

T_3 с множеством ребер $\{VIII, I, VI\}$;



T_4 с множеством ребер $\{I, VI, VII, VIII\}$; далее следует добавить ребро IX , но оно приводит к образованию цикла (более того – само является петлей), поэтому пропускаем его, переходим к ребру IV ,

T_5 с множеством ребер $\{I, IV, VI, VII, VIII\}$.

Добавление к графу T_5 любого из оставшихся ребер графа G ведет к образованию цикла. Таким образом, подграф T_5 с множеством ребер $\{I, IV, VI, VII, VIII\}$, – минимальный остов, вес которого равен $\rho(T) = 1 + 3 + 2 + 4 + 6 = 16$.

**Типовые задания по теме
«Отыскание минимального остова»**

Найдите минимальный остов графа $G=(E, V)$ с весовой функцией ρ с помощью алгоритма Краскала.

- 10.1. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ab, ag, ah, bc, bh, cd, ch, de, df, ef, eh, fg, fh\}$, $\rho(ab)=5$, $\rho(ag)=7$, $\rho(ah)=2$, $\rho(bc)=3$, $\rho(bh)=3$, $\rho(cd)=1$, $\rho(ch)=9$, $\rho(de)=4$, $\rho(df)=6$, $\rho(ef)=11$, $\rho(eh)=2$, $\rho(fg)=5$, $\rho(fh)=8$.
- 10.2. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ab, ag, ah, bc, bh, cd, ch, de, df, ef, eh, fg, fh\}$, $\rho(ab)=5$, $\rho(ag)=7$, $\rho(ah)=2$, $\rho(bc)=12$, $\rho(bh)=3$, $\rho(cd)=10$, $\rho(ch)=3$, $\rho(de)=4$, $\rho(df)=6$, $\rho(ef)=11$, $\rho(eh)=2$, $\rho(fg)=5$, $\rho(fh)=7$.
- 10.3. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ab, ag, ah, bc, bh, cd, ch, de, df, ef, eh, fg, fh\}$, $\rho(ab)=2$, $\rho(ag)=7$, $\rho(ah)=2$, $\rho(bc)=12$, $\rho(bh)=5$, $\rho(cd)=10$, $\rho(ch)=3$, $\rho(de)=4$, $\rho(df)=6$, $\rho(ef)=1$, $\rho(eh)=7$, $\rho(fg)=5$, $\rho(fh)=6$.
- 10.4. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ab, ag, ah, bc, bh, cd, ch, de, df, ef, eh, fg, fh\}$, $\rho(ab)=2$, $\rho(ag)=7$, $\rho(ah)=2$, $\rho(bc)=2$, $\rho(bh)=5$, $\rho(cd)=9$, $\rho(ch)=3$, $\rho(de)=4$, $\rho(df)=6$, $\rho(ef)=1$, $\rho(eh)=7$, $\rho(fg)=5$, $\rho(fh)=3$.
- 10.5. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ab, ag, ah, bc, bh, cd, ch, de, df, ef, eh, fg, fh\}$, $\rho(ab)=2$, $\rho(ag)=1$, $\rho(ah)=9$, $\rho(bc)=2$, $\rho(bh)=5$, $\rho(cd)=6$, $\rho(ch)=3$, $\rho(de)=4$, $\rho(df)=6$, $\rho(ef)=1$, $\rho(eh)=7$, $\rho(fg)=15$, $\rho(fh)=3$.
- 10.6. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ac, ag, ah, bc, bh, cd, ch, de, df, ef, eh, fg, gh\}$, $\rho(ac)=2$, $\rho(ag)=1$, $\rho(ah)=9$, $\rho(bc)=2$, $\rho(bh)=5$, $\rho(cd)=6$, $\rho(ch)=3$, $\rho(de)=4$, $\rho(df)=6$, $\rho(ef)=1$, $\rho(eh)=7$, $\rho(fg)=15$, $\rho(gh)=3$.
- 10.7. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ac, ag, ah, bc, bh, cd, ch, de, df, ef, eh, fg, gh\}$, $\rho(ac)=8$, $\rho(ag)=1$, $\rho(ah)=9$, $\rho(bc)=14$, $\rho(bh)=5$, $\rho(cd)=6$, $\rho(ch)=3$, $\rho(de)=9$, $\rho(df)=6$, $\rho(ef)=1$, $\rho(eh)=7$, $\rho(fg)=15$, $\rho(gh)=3$.
- 10.8. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ac, ag, ah, bc, bh, cd, ch, de, df, ef, eh, fg, gh\}$, $\rho(ac)=8$, $\rho(ag)=6$, $\rho(ah)=9$, $\rho(bc)=14$, $\rho(bh)=5$, $\rho(cd)=6$, $\rho(ch)=3$, $\rho(de)=9$, $\rho(df)=6$, $\rho(ef)=1$, $\rho(eh)=7$, $\rho(fg)=2$, $\rho(gh)=9$.
- 10.9. $V=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E=\{ac, ag, ah, bc, bh, cd, ch, de, df, ef, eh, fg, gh\}$, $\rho(ac)=8$, $\rho(ag)=3$, $\rho(ah)=9$, $\rho(bc)=14$, $\rho(bh)=5$, $\rho(cd)=$

- 4, $\rho(ch) = 6$, $\rho(de) = 9$, $\rho(df) = 6$, $\rho(ef) = 1$, $\rho(eh) = 7$, $\rho(fg) = 2$, $\rho(gh) = 9$.
- 10.10. $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E = \{ac, ag, ah, bc, bh, cd, ch, de, df, ef, eh, fg, gh\}$, $\rho(ac) = 8$, $\rho(ag) = 3$, $\rho(ah) = 9$, $\rho(bc) = 14$, $\rho(bh) = 5$, $\rho(cd) = 4$, $\rho(ch) = 6$, $\rho(de) = 9$, $\rho(df) = 12$, $\rho(ef) = 5$, $\rho(eh) = 2$, $\rho(fg) = 7$, $\rho(gh) = 9$.
- 10.11. $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E = \{ac, af, ah, bc, bh, ce, ch, de, df, ef, eh, fg, gh\}$, $\rho(ac) = 8$, $\rho(af) = 3$, $\rho(ah) = 9$, $\rho(bc) = 14$, $\rho(bh) = 5$, $\rho(ce) = 4$, $\rho(ch) = 6$, $\rho(de) = 9$, $\rho(df) = 12$, $\rho(ef) = 5$, $\rho(eh) = 2$, $\rho(fg) = 7$, $\rho(gh) = 9$.
- 10.12. $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E = \{ac, af, ah, bc, bh, ce, ch, de, df, ef, eh, fg, gh\}$, $\rho(ac) = 8$, $\rho(af) = 3$, $\rho(ah) = 5$, $\rho(bc) = 3$, $\rho(bh) = 8$, $\rho(ce) = 4$, $\rho(ch) = 6$, $\rho(de) = 9$, $\rho(df) = 12$, $\rho(ef) = 5$, $\rho(eh) = 2$, $\rho(fg) = 7$, $\rho(gh) = 9$.
- 10.13. $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E = \{ac, af, ah, bc, bh, ce, ch, de, df, ef, eh, fg, gh\}$, $\rho(ac) = 2$, $\rho(af) = 3$, $\rho(ah) = 5$, $\rho(bc) = 3$, $\rho(bh) = 8$, $\rho(ce) = 4$, $\rho(ch) = 6$, $\rho(de) = 9$, $\rho(df) = 12$, $\rho(ef) = 5$, $\rho(eh) = 10$, $\rho(fg) = 7$, $\rho(gh) = 2$.
- 10.14. $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E = \{ac, af, ah, bc, bh, ce, ch, de, df, ef, eh, fg, gh\}$, $\rho(ac) = 2$, $\rho(af) = 3$, $\rho(ah) = 5$, $\rho(bc) = 3$, $\rho(bh) = 8$, $\rho(ce) = 7$, $\rho(ch) = 6$, $\rho(de) = 1$, $\rho(df) = 3$, $\rho(ef) = 5$, $\rho(eh) = 10$, $\rho(fg) = 7$, $\rho(gh) = 2$.
- 10.15. $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E = \{ac, af, ah, bc, bh, ce, ch, de, df, ef, eh, fg, gh\}$, $\rho(ac) = 6$, $\rho(af) = 3$, $\rho(ah) = 5$, $\rho(bc) = 3$, $\rho(bh) = 8$, $\rho(ce) = 7$, $\rho(ch) = 11$, $\rho(de) = 1$, $\rho(df) = 3$, $\rho(ef) = 2$, $\rho(eh) = 10$, $\rho(fg) = 7$, $\rho(gh) = 2$.
- 10.16. $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E = \{ab, ac, ad, bd, bf, cd, de, ef, eg, fg, fh, gh\}$, $\rho(ab) = 3$, $\rho(ac) = 3$, $\rho(ad) = 2$, $\rho(bd) = 4$, $\rho(bf) = 1$, $\rho(cd) = 2$, $\rho(de) = 3$, $\rho(ef) = 1$, $\rho(eg) = 1$, $\rho(fg) = 2$, $\rho(fh) = 5$, $\rho(gh) = 2$.
- 10.17. $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E = \{ab, ac, ad, bd, bf, cd, de, ef, eg, fg, fh, gh\}$, $\rho(ab) = 4$, $\rho(ac) = 3$, $\rho(ad) = 2$, $\rho(bd) = 4$, $\rho(bf) = 5$, $\rho(cd) = 2$, $\rho(de) = 3$, $\rho(ef) = 1$, $\rho(eg) = 5$, $\rho(fg) = 2$, $\rho(fh) = 5$, $\rho(gh) = 2$.
- 10.18. $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E = \{ab, ac, ad, bd, bf, cd, de, ef, eg, fg, fh, gh\}$, $\rho(ab) = 4$, $\rho(ac) = 3$, $\rho(ad) = 2$, $\rho(bd) = 4$, $\rho(bf) = 5$, $\rho(cd) = 2$, $\rho(de) = 3$, $\rho(ef) = 1$, $\rho(eg) = 5$, $\rho(fg) = 2$, $\rho(fh) = 1$, $\rho(gh) = 3$.
- 10.19. $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E = \{ab, ac, ad, bd, bf, cd, de, ef, eg, fg, fh, gh\}$, $\rho(ab) = 4$, $\rho(ac) = 1$, $\rho(ad) = 4$, $\rho(bd) = 2$, $\rho(bf) = 5$, $\rho(cd) = 2$, $\rho(de) = 3$, $\rho(ef) = 1$, $\rho(eg) = 5$, $\rho(fg) = 2$, $\rho(fh) = 1$, $\rho(gh) = 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов : учебник для вузов. СПб. : Питер, 2004. 364 с.
2. Судоплатов С.В., Овчинников Е.В. Элементы дискретной математики : учебник. М. : ИНФРА-М, Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2002. 280 с.
3. Олейник Т.А. Лекции по дискретной математике [Электронный ресурс] : курс лекций, [2006]. 75 с. URL: <http://www.mielt.ru/dir/download/299.html> (дата обращения: 30.04.2011).

С.В. Усов

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ
НАПРАВЛЕНИЯ «ИНФОРМАТИКА
И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА»**

Подписано в печать
Формат 60 x 84 1/16. Печ.л. Уч.-изд.л.
Тираж 100 экз.