МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

А. С. Котюргина, В. Н. Задорожный, Е. И. Федорова

ВЕРОЯТНОСТЬ: ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

*Допущено Учебно-методическим объединением вузов
Российской Федерации по университетскому политехническому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся
по направлениям подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
09.03.04 «Программная инженерия», 27.03.03 «Системный анализ и управление»*

Омск
Издательство ОмГТУ
2014

УДК 519.2:004.421.5:004.7(075)
ББК 22.17+32.81я73
К73

Рецензенты:

В. А. Мещеряков, д-р техн. наук, зав. кафедрой «Информатика и информационные технологии» Омского филиала ФГОБУ ВПО «Финансовый университет при Правительстве РФ»;

В. В. Сервах, д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. ОФ ФГБУН ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН

Котюргина, А. С.

К73 Вероятность: теория и эксперимент : учеб. пособие / А. С. Котюргина, В. Н. Задорожный, Е. И. Федорова ; Минобрнауки России, ОмГТУ. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2014. – 196 с. : ил.

ISBN 978-5-8149-1897-0

Приведены основные понятия, теоремы и методы теории вероятностей, предложены индивидуальные задания, содержащие разнообразные авторские версии типовых задач для самостоятельного решения. Как естественное развитие этого материала изложены основы статистического моделирования.

Предназначено для использования студентами 2, 3 и 4-го курсов, обучающимися по направлениям подготовки 230100.62 «Информатика и вычислительная техника», 220100.62 «Системный анализ и управление», 231000.62 «Программная инженерия» и специальности 230106.65 «Применение и эксплуатация автоматизированных систем специального назначения», дневной и заочной форм обучения при изучении дисциплин «Теория вероятностей» и «Моделирование систем».

УДК 519.2:004.421.5:004.7(075)
ББК 22.17+32.81я73

ISBN 978-5-8149-1897-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие можно разделить на две части, основное различие между которыми выражено в его названии.

Первая из них, включающая главы 1–3, посвящена классическим вопросам теории вероятностей и комбинаторики, изучаемым в технических вузах по учебным планам направлений подготовки студентов «Информатика и вычислительная техника», «Системный анализ и управление», «Программная инженерия» и по учебным планам специальности «Применение и эксплуатация автоматизированных систем специального назначения». В этой части используется достаточно устоявшаяся терминология, общепринятая в русскоязычной литературе по теории вероятностей и комбинаторике [1–7].

В главе 1 дается краткое изложение основного теоретического материала курса теории вероятностей, изучаемого по вышеперечисленным учебным планам.

В главе 2 предлагаются задачи на применение теории: приводится 30 вариантов заданий, содержащих по 17 типовых задач. Задания отличаются оригинальными и разнообразными формулировками типовых задач, не позволяющими найти их готовые решения в Интернете, и в то же время не выходят по сложности за рамки изучаемого курса.

В главе 3 разбираются 17 типовых задач демонстрационного варианта задания и приводятся их решения. Материал этой главы дает студентам возможность использования учебного пособия для самостоятельной работы и создает необходимый контекст для правильного понимания всех 30 вариантов заданий, приведенных в главе 2.

В приложениях приводятся справочные таблицы.

Другая часть пособия, представленная главой 4, посвящена экспериментам с объектами случайной природы. Эксперименты выполняются в Excel – широко распространенной и, как правило, хорошо известной студентам среде электронных таблиц. Здесь на примерах экспериментального решения нескольких задач, рассмотренных с теоретических позиций в главе 3, излагаются ключевые идеи метода статистического моделирования и основные технические приемы его компьютерной реализации. Определенная ограниченность инструментов Excel в плане их гибкости (по сравнению с языками программирования) не ощущается на этом этапе первоначального знакомства с методом статистического моделирования, но сполна компенсируется наглядностью проводимых вычислений.

Предполагается, что студенты в той или иной мере будут использовать обе части пособия как при изучении дисциплины «Теория вероятностей», так и при изучении опирающихся на нее последующих дисциплин, в частности при изучении «Моделирования систем».

Поэтому изложение теоретических и экспериментальных методов теории вероятностей в одном пособии в их органической связи будет способствовать, на взгляд авторов, более живому восприятию студентами понятий и законов теории вероятностей (на этапе ее изучения) и более глубокому пониманию возможностей статистического моделирования (на этапе изучения дисциплин, опирающихся на теорию вероятностей). Накопленный авторами личный опыт преподавания убедительно свидетельствует, что студенты, выполняющие на компьютере статистические эксперименты, значительно обогащают и уточняют свои представления о предмете и законах теории вероятностей и в последующем без особых затруднений пользуются как классическими аналитическими ее методами, так и методом статистического моделирования (в случаях, когда решаемые задачи аналитическим методам не поддаются).

Главы 1–3 написаны А.С. Котюргиной и Е.И. Федоровой, гл. 4 – В.Н. Задорожным.

Авторы выражают благодарность Николаевой Натальи Ивановне за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания и Лобовой Светлане Александровне за оперативное и качественное техническое оформление работы.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Комбинаторика

Правило суммы (X *или* Y, *операция «или»*). Если элемент X можно выбрать n способами, а элемент Y можно выбрать другими m способами, то один из элементов X или Y (либо X, либо Y) можно выбрать $n+m$ способами.

Правило произведения (X *и* Y, *операция «и»*). Если элемент X можно выбрать n способами, а затем элемент Y можно выбрать m способами, то оба элемента X и Y в указанном порядке можно выбрать $n \cdot m$ способами.

Обобщим правило произведения. Если элемент X_1 можно выбрать n_1 способами, после каждого такого выбора элемент X_2 можно выбрать n_2 способами, …, после выбора элементов $X_1, X_2, ..., X_{k-1}$ элемент X_k можно выбрать n_k способами, тогда упорядоченный набор элементов $\left(X_1, X_2, ..., X_k\right)$ можно выбрать $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ способами.

Рассмотрим множество X, состоящее из n различных элементов. Любой упорядоченный набор элементов, состоящий из k элементов множества X, называется *размещением с повторением* (*размещением с возвращением*) из n элементов по k элементов. Число различных размещений с повторением из n элементов по k элементов равно

$$\overline{A}_n^k = n^k. \tag{1}$$

Размещения с повторениями предполагают, что элемент, выбранный из множества X, возвращается в множество X и может быть выбран еще раз. Размещения с повторением отличаются элементами, их порядком и числом повторений элементов.

Рассмотрим множество X, состоящее из n различных элементов. Любой упорядоченный набор элементов, состоящий из k *различных* элементов множества X, называется *размещением без повторений* (*размещением без возвращений*) из n элементов по k элементов. Число различных размещений без повторений из n элементов по k элементов равно

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \qquad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \quad 0! = 1. \tag{2}$$

Размещения без повторений предполагают, что элемент, выбранный из множества X, уже не возвращается в множество X и не может быть выбран еще раз. Размещения без повторений отличаются либо составом элементов, либо порядком их следования.

Размещения без повторений из n элементов по n элементов называются *перестановками* из n элементов. Число различных перестановок из n элементов равно

$$P_n = n!$$

Перестановки предполагают, что элемент, выбранный из множества X, уже не возвращается в множество X и не может быть выбран еще раз. Перестановки имеют один состав элементов и отличаются лишь порядком их следования.

Рассмотрим множество X, состоящее из s различных элементов: $X_1, X_2, ..., X_S$. Будем формировать упорядоченные наборы элементов, состоящие из $n = k_1 + k_2 + ... + k_S$ элементов множества X. При этом элемент X_1 встретится k_1 раз, элемент X_2 встретится k_2 раз, … , элемент X_S встретится k_S раз. Такие упорядоченные наборы элементов называются перестановками с повторением из n элементов. Число различных перестановок с повторениями из n элементов в этом случае равно

$$P_n(k_1, ..., k_S) = \frac{n!}{k_1! k_2! ... k_S!}.$$

Рассмотрим множество X, состоящее из n различных элементов. Всякое подмножество данного множества X, содержащее k различных элементов, называется *сочетанием без повторений* из n элементов по k элементов. Число различных сочетаний без повторений из n элементов по k элементов равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{3}$$

Сочетания без повторений предполагают, что элемент, выбранный из множества X, уже не возвращается в множество X и не может быть выбран еще раз. Сочетания без повторений отличаются только составом элементов. В сочетаниях порядок элементов не учитывается.

Рассмотрим множество *X*, состоящее из n различных элементов. Выберем k элементов, не принимая во внимание порядок элементов в выборке и учитывая, что среди элементов выборки могут быть повторяющиеся. Такие неупорядоченные наборы элементов называются *сочетаниями с повторением* из n элементов по k элементов. Число различных сочетаний с повторением из n элементов по k элементов равно

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k .$$

Сочетания с повторениями предполагают, что элемент, выбранный из множества *X*, может возвращаться в множество X и быть выбран еще раз. Сочетания с повторениями отличаются элементами и числом повторений элементов. В сочетаниях порядок элементов не учитывается.

Добавим, что формула $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$ выражает также число разложений целого $k \geq 1$ на n неотрицательных слагаемых.

Сведем все формулы для вычислений числа выборок в табл. 1.

Таблица 1

Выборки	Без повторений	С повторением
Перестановки	$P_n = n!$	$P_n(n_1,...,n_k) = \dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$
Размещения	$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$	$\overline{A}_n^m = n^m$
Сочетания	$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$	$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$

1.2. Случайные события

1.2.1. Основные понятия. Действия над событиями

Пусть проводятся некоторые испытания (опыты, наблюдения, эксперименты). *Случайным событием* (*событием*) называется любой результат испытания, который может наступить (произойти) или не наступить (не произойти). Случайные события будем обозначать $A, B, C, D, \ldots$.

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно наступит в результате испытания. Событие называется *невозможным*, если оно ни-когда не наступит в результате испытания. Достоверное и невозможное события будем обозначать соответственно Ω и $\varnothing$.

Суммой событий A и B называется событие $A+B$, состоящее в появлении хотя бы одного из двух событий A или B (или A, или B, или оба события вместе).

Произведением событий A и B называется событие $A \cdot B$, состоящее в появлении обоих событий A и B (и событие A, и событие B).

События A и B называются *несовместными*, если наступление одного из событий исключает наступление другого в этом же испытании. Для несовместных событий их произведение является невозможным событием: $A \cdot B = \varnothing$. Несколько случайных событий называются *попарно несовместными*, если любые два из них являются несовместными.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют *полную группу*, если в результате испытания наступит хотя бы одно из них. Сумма событий, образующих полную группу, является достоверным событием: $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$.

Событие $\overline{A}$ называется *противоположным событию* A, если оно состоит в ненаступлении события A. То есть противоположные события являются несовместными и образуют полную группу: если A наступает, то $\overline{A}$ не наступает и наоборот.

События называются *равновозможными*, если нет оснований считать, что какое-то из этих событий является более возможным, чем другое.

Свойства операций сложения и умножения:

1. $A + A = A$
2. $A + \Omega = \Omega$
3. $A + \varnothing = A$
4. $A \cdot A = A$
5. $A \cdot \Omega = A$
6. $A \cdot \varnothing = \varnothing$
7. $A + B = B + A$
8. $(A+B)+C = A+(B+C)$
9. $A \cdot B = B \cdot A$
10. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
11. $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
12. $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
13. $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

1.2.2. Определение вероятности события

Классическое определение вероятности события.

Если в результате испытания может наступить конечное число событий и они:

1) образуют полную группу,

2) попарно несовместны,

3) равновозможны,

то такие события называются *элементарными исходами испытания*.

Пусть испытание имеет n элементарных исходов. Элементарные исходы, в которых наступает событие A, называются *благоприятными* (*благоприятствующими*) для события A.

Вероятностью (*классической вероятностью*) события A называется отношение числа благоприятных для события A исходов к общему числу элементарных исходов испытания:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где $P(A)$ – классическая вероятность случайного события A;

m – число благоприятных для события A исходов;

n – общее число элементарных исходов.

Из определения вытекают следующие свойства вероятности события: $0 \le P(A) \le 1$, $P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$.

Геометрическое определение вероятности события.

Рассмотрим на плоскости область D, содержащую область d (рис. 1). Площади областей D и d обозначим $S(D)$ и $S(d)$ соответственно. В области D случайно выбирается точка X. Предположим, что равновозможно попадание точки X на d, где бы область d не находилась внутри области D, при условии, что площадь d фиксирована. Пусть событие A состоит в том, что выбранная точка X попала в область d.

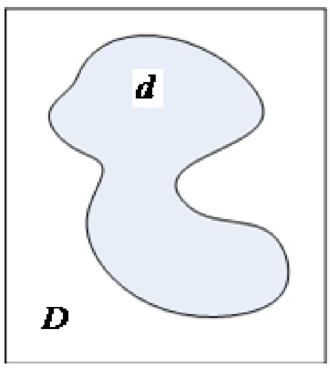


Рис. 1. Области D, d

Геометрической вероятностью $P(A)$ события A называют отношение площади области d к площади области D:

$$P(A) = \frac{S(d)}{S(D)}.$$

Статистическое определение вероятности события.

Пусть в n испытаниях некоторое событие A появилось n_A раз.

Относительной частотой $P^*(A)$ события A называют отношение числа испытаний, в которых событие A появилось, к общему числу проведенных испытаний:

$$P^*(A)=\frac{n_A}{n}.$$

Статистической вероятностью $P(A)$ события A называют число, около которого колеблется относительная частота события A, приближаясь к нему при увеличении числа испытаний:

$$P^*(A)=\frac{n_A}{n}\to P(A),\qquad n\to\infty.$$

1.2.3. Вероятность суммы и произведения событий

Вероятность суммы двух событий выражается формулой

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

Для несовместных событий вероятность суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{4}$$

Условной вероятностью $P(A|B)$ события A называется вероятность наступления этого события, вычисленная в предположении, что событие B наступило.

Вероятность произведения двух событий выражается формулой

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B|A)=P(A|B)\cdot P(B).$$

Условную вероятность $P(A|B)$ можно вычислить по формуле

$$P(A|B)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}.$$

События A и B называются *независимыми*, если $p(A|B)=p(A)$, $p(B|A)=p(B)$, т. е. наступление одного из них не изменяет вероятность другого.

Для независимых событий вероятность произведения равна произведению вероятностей:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \quad (5)$$

1.2.4. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть с испытанием связаны события $H_1, H_2, \dots, H_n$, которые образуют полную группу и являются попарно несовместными, т. е. $\sum_{k=1}^{n} H_k = \Omega$ и $H_i \cdot H_j = \varnothing,\ i \neq j$. Такие события называются *гипотезами* (гипотезы, в отличие от элементарных исходов, не обязательно являются равновозможными). Пусть A – некоторое событие. Пусть известны вероятности $P(H_1)$, $P(H_2)$, …, $P(H_n)$ и условные вероятности $P(A|H_1)$, $P(A|H_2)$, … , $P(A|H_n)$.

Тогда вероятность события A можно вычислить по *формуле полной вероятности*:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) P(A|H_k). \quad (6)$$

Если испытание произведено и стало известно, что событие A произошло, то прежние (априорные) вероятности $P(H_k)$, $k = 1, 2, ..., n$ гипотез должны быть заменены на новые (апостериорные) условные вероятности гипотез $P(H_k|A)$, $k = 1, 2, ..., n$, которые можно вычислить по *формуле Байеса*:

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) P(A|H_k)}{P(A)},\ k = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

1.2.5. Схема Бернулли

Пусть проводится последовательность n независимых испытаний. Независимость испытаний подразумевает, что условия испытания каждый раз восстанавливаются после каждого его проведения. В каждом из проводимых испытаний событие A может наступить с вероятностью p и не наступить с вероятностью $q = 1 - p$. Такая последовательность испытаний называется *схемой Бернулли*.

Обозначим через $P_n(m)$ вероятность того, что в схеме Бернулли из n испытаний событие A наступит ровно m раз $(0 \le m \le n)$.

Тогда имеет место *формула Бернулли:*

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \qquad m = 0, 1, \dots, n. \tag{8}$$

Целое число k $(0 \le k \le n)$ называется *наивероятнейшим числом* наступлений события в схеме Бернулли, если $P_n(k) \ge P_n(m)$ для всех $m = 0, 1, \dots, n$. Число k определяется из неравенств

$$np - q \le k \le np + p. \tag{9}$$

Если число испытаний n достаточно велико, то можно использовать более удобные приближенные формулы в схеме Бернулли:

– *формула Пуассона*:

$$P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \tag{10}$$

где $a = np = \text{const}$, $p \le 0{,}1$;

– *локальная формула Муавра – Лапласа*:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{11}$$

где $p \ne 0$, $p \ne 1$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Гаусса (рис. 2).

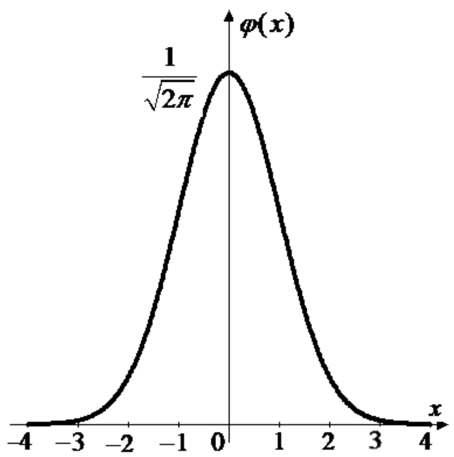


Рис. 2. Функция Гаусса

Свойства функции Гаусса:

1) $\varphi(-x)=\varphi(x)$,

2) при $|x|\geq 5$ можно принять $\varphi(x)=0$.

Если в схеме Бернулли число испытаний n велико, то для вычисления вероятности того, что интересующее нас событие появится не менее m_1 и не более m_2 раз, можно использовать *интегральную формулу Муавра – Лапласа*:

$$P_n(m_1\leq m\leq m_2)\approx\Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{12}$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа (рис. 3).

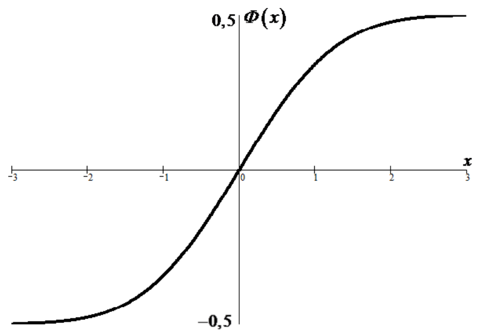


Рис. 3. Функция Лапласа

Свойства функции Лапласа:

1) $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, (13)

2) при $|x|\geq 5$ можно принять $|\Phi(x)|=0{,}5$.

1.3. Случайные величины

1.3.1. Дискретные и непрерывные случайные величины

Под *случайной величиной* (СВ) понимают величину, которая в результате испытания принимает то или иное возможное числовое значение, причем заранее неизвестно, какое именно. Случайные величины будем обозначать X, Y, Z, … .

Случайная величина называется *дискретной*, если ее возможные значения можно перенумеровать.

Закон распределения дискретной СВ может быть задан таблицей распределения, рядом распределения (если множество значений бесконечно) или функцией распределения.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – все возможные значения дискретной СВ X, p_1, p_2,…, p_n – вероятности этих значений соответственно: $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1,...,n$. Очевидно, что $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$. *Таблица распределения СВ* X содержит все возможные значения случайной величины X и соответствующие им вероятности:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	

Пусть $x \in \mathbb{R}$. *Функцией распределения* случайной величины X называется функция $F(x)$, которая равна вероятности того, что случайная величина в результате испытания примет значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x), \text{ где } x \in \mathbb{R}.$$

Свойства функции распределения $F(x)$:

1. $0 \le F(x) \le 1$.
2. $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.
3. $F(x_1) \le F(x_2)$ для $x_1 < x_2$. (14)
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

Отметим, что график функции распределения дискретной СВ является ступенчатой линией (точки разрыва – возможные значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ СВ).

Случайная величина называется *непрерывной*, если ее функция распределения является непрерывной и кусочно-дифференцируемой функцией.

Возможные значения непрерывной случайной величины заполняют один или несколько конечных или бесконечных промежутков числовой оси.

Закон распределения непрерывной СВ может быть задан функцией распределения $F(x)$ или плотностью распределения $f(x)$.

Плотностью распределения (плотностью вероятностей) непрерывной случайной величины X в точке x называется предел отношения вероятности попадания случайной величины в промежуток $[x; x+\Delta x]$ к длине промежутка Δx при стремлении последнего к нулю:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Свойства плотности распределения $f(x)$:

1. $f(x) \geq 0.$

2. $P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

4. $f(x) = F'(x),\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$ (15)

1.3.2. Числовые характеристики случайных величин

Числовыми характеристиками СВ являются математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение. Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины с учетом вероятностей. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение характеризуют разброс значений случайной величины вокруг математического ожидания.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X, имеющей закон распределения $p_i = P(X = x_i),\ i = 1,...,n$, называется сумма

$$M[X] = m_X = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i, \quad n \leq \infty. \tag{16}$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, имеющей закон распределения $f(x)$, называется несобственный интеграл

$$M[X] = m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx. \tag{17}$$

Свойства математического ожидания:

1. $M[C]=C,$ где C – const.
2. $M[C\,X]=C\cdot M[X]$.
3. $M[X+Y]=M[X]+M[Y]$ для любых X, Y.
4. $M[X\,Y]=M[X]\cdot M[Y]$, если СВ X и Y независимы.

Дисперсией $D[X]$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания

$$D[X]=M\left[\left(X-m_x\right)^2\right].$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется число

$$\sigma_x=\sqrt{D[X]}\,. \tag{18}$$

Дисперсия дискретной СВ X, имеющей закон распределения $p_i=P\left(X=x_i\right),\quad i=1,\ldots,n$ равна

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-m_X\right)^2 p_i,\quad n\le\infty\,.$$

Дисперсия непрерывной СВ X, имеющей закон распределения $f(x)$, равна

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-m_X\right)^2 f(x)\,dx\,.$$

Свойства дисперсии:

1. $D[C]=0$, где C – const.
2. $D[C\,X]=C^2\cdot D[X]$, где C – const.
3. $D[X+Y]=D[X]+D[Y]$, если СВ X и Y независимы.
4. $D[X]=M\left[X^2\right]-m_X^2$.

Используя четвертое свойство, дисперсию дискретной и непрерывной СВ удобнее вычислять по следующим формулам соответственно:

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}\,p_i-m_X^2\,, \tag{19}$$

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)\,dx-m_X^2\,. \tag{20}$$

1.3.3. Основные законы распределения случайных величин

Дискретные случайные величины:

Биномиальный закон

Закон распределения: $p_m = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, $\quad m = 0,1,...,n,\ 0 < p < 1,$ $p + q = 1.$

Числовые характеристики: $M[X] = np,\ D[X] = npq.$

Закон Пуассона

Закон распределения: $p_m = P(X = m) = \dfrac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad m = 0, 1, 2, ...$

Числовые характеристики: $M[X] = D[X] = a.$

Гипергеометрический закон

Закон распределения: $p_m = P(X = m) = \dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \qquad m = 0,1,...,\min(n, M),$ $1 \le M \le N,\ \ m \le n,\ 1 \le n \le N,\ \ n, M, N -$ натуральные числа.

Числовые характеристики: $M[X] = n \cdot \dfrac{M}{N},\ D[X] = n \cdot \dfrac{M}{N-1} \cdot \left(1 - \dfrac{M}{N}\right)\left(1 - \dfrac{n}{N}\right).$

Непрерывные случайные величины:

Равномерный закон

Плотность распределения (рис. 4):

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & x < a,\ x > b. \end{cases}$$

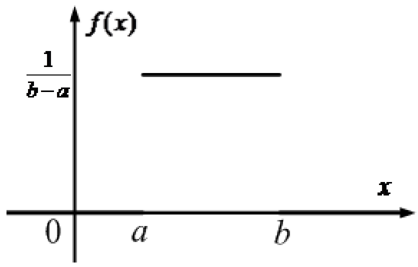


Рис. 4. Плотность равномерного распределения

Функция распределения (рис. 5):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

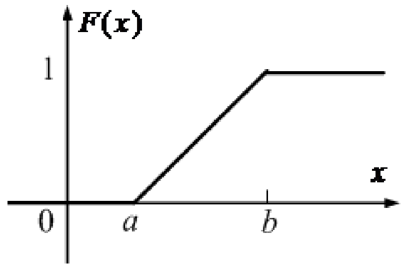


Рис. 5. Функция распределения равномерного закона

Числовые характеристики:

$$M[X] = \frac{a+b}{2},\ D[X] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Показательный закон

Плотность распределения (рис. 6):

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

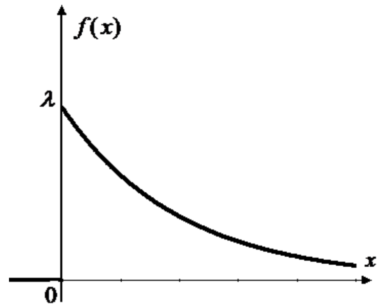


Рис. 6. Плотность показательного распределения

Функция распределения (рис. 7):

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 1-e^{-\lambda x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

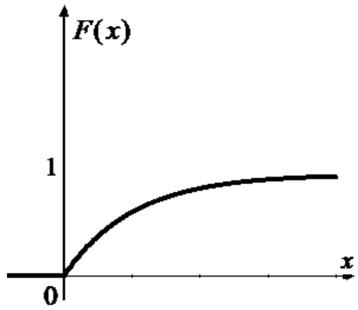


Рис. 7. Функция распределения показательного закона

Числовые характеристики:

$M[X]=1/\lambda$, $D[X]=1/\lambda^2$.

Пусть T – время безотказной работы прибора. Случайная величина T имеет показательный закон распределения. Функция распределения $F(t)=P(T<t)$ определяет вероятность отказа за время t, тогда функция $(1-F(t))$ определяет вероятность безотказной работы за это время. Функцией надежности $R(t)$ прибора называется вероятность безотказной работы прибора за время t:

$$R(t)=P(T>t)=1-F(t)=e^{-\lambda t}. \tag{21}$$

Нормальный закон

Закон распределения:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{22}$$

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\,dt, \tag{23}$$

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \tag{24}$$

График плотности распределения (22) представлен на рис. 8.

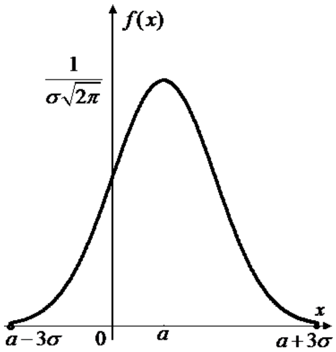


Рис. 8. Плотность нормального распределения

Числовые характеристики: $M\left[X\right]=a,\ \ D\left[X\right]=\sigma^2.$

Дополнительно приведем формулы для вычисления вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в определенные промежутки:

а) в промежуток $\left(x_1,x_2\right)$: $P\left(x_1<X<x_2\right)=\Phi\left(\dfrac{x_2-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{x_1-a}{\sigma}\right),$ (25)

б) в промежуток $\left(a-\varepsilon,a+\varepsilon\right)$: $P\left(\left|X-a\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\dfrac{\varepsilon}{\sigma}\right),$ (26)

в) в промежуток $\left(a-3\sigma,a+3\sigma\right)$: $P\left(\left|X-a\right|<3\sigma\right)=1-0{,}0027...\approx 1$ (т. е. такое событие практически достоверно и называется правилом трех сигм).

1.4. Двумерная случайная величина

1.4.1. Основные понятия

Двумерной случайной величиной (*X*, *Y*) *(системой двух СВ)* называется упорядоченная пара двух случайных величин *X* и *Y*.

Если случайные величины *X* и *Y* дискретны, то система СВ называется *дискретной*, если же случайные величины *X* и *Y* непрерывны, то система СВ называется *непрерывной*.

Закон распределения дискретной системы двух СВ может быть задан таблицей распределения (рядом распределения) или совместной функцией распределения $F\left(x,y\right)$.

Пусть $x_1,x_2,...,x_n$ – все возможные значения СВ *X*, $y_1,y_2,...,y_m$ – все возможные значения СВ Y. Пусть $p_{ij}=P\left(X=x_i,Y=y_j\right)$ для любых $i=1,...,n,\ \ j=1,...,m.$ Очевидно, что $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}p_{ij}=1$. *Таблица распределения* (табл. 2) системы дискретных СВ содержит все возможные значения системы СВ и их вероятности.

Таблица 2

Y / X	y_1	y_2	y_3	…	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	…	p_{1m}	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}=1$
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	…	p_{2m}	
…	…	…	…	…	…	
x_n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}	…	p_{nm}	

Зная закон распределения дискретной системы СВ (X, Y) можно найти *законы распределения* составляющих X и Y, так как $\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_i,\ i=1, \dots ,n,\ \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = p_j,\ j=1, \dots ,m.$

Пусть $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. *Функцией распределения* (дискретной или непрерывной) системы СВ (X, Y) функция F (x, y), которая равна вероятности того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, а величина Y – меньшее y:

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y), \text{ где } x \in \mathbb{R},\ \ y \in \mathbb{R}.$$

Свойства функции распределения $F(x,y)$:

1. $0 \le F(x,y) \le 1.$

2. $F(x_1,y) \le F(x_2,y)$ при $x_1 < x_2$, $F(x,y_1) \le F(x,y_2)$ при $y_1 < y_2$.

3. $F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0.$

4. $F(+\infty,+\infty) = 1.$

5. $F(x,+\infty) = F_X(x)$, $F(+\infty,y) = F_Y(y)$, где $F_X(x)$, $F_Y(y)$– функции распределения отдельных случайных величин X и Y соответственно.

6. $P(x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2) = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1).$

Непрерывная система двух СВ может быть задана функцией распределения $F(x,y)$ или плотностью распределения $f(x,y)$.

Плотностью совместного распределения вероятностей непрерывной системы СВ (X,Y) называется функция

$$f(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P(x<X<x+\Delta x,\ y<Y<y+\Delta y)}{\Delta x\cdot\Delta y}.$$

Свойства функции $f(x,y)$:

1. $f(x,y)\ge 0$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx\,dy=1$.

3. $P((X,Y)\in D)=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, где D – некоторая область.

4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=f_X(x)$; (27)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=f_Y(y), \tag{28}$$

где $f_X(x), f_Y(y)$ – плотности распределения составляющих X и Y соответственно.

5. $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}f(u,v)\,du\,dv$, $f(x,y)=F''_{xy}(x,y)$.

1.4.2. Зависимые и независимые случайные величины

Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если независимыми являются события $X<a$ и $Y<b$ для любых действительных чисел a, b. Иначе случайные величины называются *зависимыми*.

Зная закон распределения дискретной системы СВ (X, Y), можно найти законы распределения составляющих X и Y. Учитывая, что условную вероятность событий вычисляют по формуле $P(A|B)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}$, можно пересчитать вероятности $P(X=x_i|Y=y_j)$, $i=1,\dots,n$ значений СВ X при условии, что СВ Y приняла значение $Y=y_j$:

$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)},\quad i=1,\dots,n,\quad j=1,\dots,m. \tag{29}$$

Закон распределения случайной величины X в этом случае называется *условным законом распределения случайной величины X при условии* $Y = y_j$.

Аналогично вводится *условный закон распределения случайной величины Y при условии* $X = x_i$:

$$P(Y = y_j \big| X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)}, \quad j = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n. \quad (30)$$

Дискретные случайные величины X и Y будут независимыми, если выполнится одно из трех условий:

1. $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

2. $p\left(X = x_i, Y = y_j\right) = p\left(X = x_i\right) \cdot p\left(Y = y_j\right)$, (31)

где $i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m$.

3. Безусловный закон распределения СВ X (СВ Y) совпадает с условным законом распределения СВ X (СВ Y).

Зная плотность распределения $f(x, y)$ непрерывной системы СВ (X, Y) и используя формулы (27) и (28), можно восстановить безусловные плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ составляющих X и Y.

Условной плотностью распределения $f(x|y)$ *случайной величины X при условии, что $Y = y$*, называется функция

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \text{ где } f_Y(y) \neq 0. \quad (32)$$

Аналогично определяется *условная плотность распределения* $f(y|x)$ *случайной величины Y при условии, что* $X = x$:

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}, \text{ где } f_X(x) \neq 0. \quad (33)$$

Непрерывные случайные величины X и Y будут независимыми, если выполнится одно из трех условий:

1. $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$.

2. $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$.

3. Безусловная плотность распределения СВ X (СВ Y) совпадает с условной плотностью распределения СВ X (СВ Y).

1.4.3. Числовые характеристики системы случайных величин. Коррелированные и некоррелированные случайные величины

Математическим ожиданием системы СВ (X, Y) называется точка $(M[X],M[Y])$, где $M[X]$ и $M[Y]$ являются математическими ожиданиями случайных величин X и Y соответственно.

Математические ожидания дискретной системы двух СВ могут быть вычислены по формулам:

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i\,p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}x_i\,p_i\,; \tag{34}$$

$$M[Y]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j\,p_{ij}=\sum_{j=1}^{m}y_j\,p_j\,, \tag{35}$$

где $p_{ij}=P\left(X=x_i,\ Y=y_j\right),\ p_i=P(X=x_i),\ p_j=P\left(Y=y_j\right),\ n,m\le\infty$.

Математические ожидания непрерывной системы двух СВ могут быть вычислены по формулам:

$$M[X]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\,f_X(x)\,dx\,; \tag{36}$$

$$M[Y]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y\,f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y\,f_Y(y)\,dy\,. \tag{37}$$

Дисперсией системы СВ (X,Y) называется точка $(D[X],D[Y])$, где $D[X]$ и $D[Y]$ являются дисперсиями случайных величин X и Y.

Дисперсии дискретной системы двух СВ могут быть вычислены по формулам:

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_i-M[X]\right)^2 p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M[X]\right)^2 p_i;$$

$$D[Y]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(y_j-M[Y]\right)^2 p_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\left(y_j-M[Y]\right)^2 p_j,$$

где $p_{ij}=P\left(X=x_i,\ Y=y_j\right),\ p_i=P\left(X=x_i\right),\ p_j=P\left(Y=y_j\right),\ n,m\le\infty$.

При вычислении дисперсии дискретной системы двух СВ удобнее пользоваться формулами:

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i-M^2[X]; \tag{38}$$

$$D[Y]=\sum_{j=1}^{m}y_j^2 p_j-M^2[Y]. \tag{39}$$

Дисперсии непрерывной системы двух СВ могут быть вычислены по формулам:

$$D[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M[X]\right)^2 f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M[X]\right)^2 f_X(x)\,dx;$$

$$D[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(y-M[Y]\right)^2 f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(y-M[Y]\right)^2 f_Y(y)\,dy.$$

При вычислении дисперсии непрерывной системы двух СВ удобнее пользоваться формулами:

$$D[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x,y)\,dxdy-\left(M[X]\right)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f_X(x)\,dx-M^2[X]; \tag{40}$$

$$D[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 f(x,y)\,dxdy-\left(M[Y]\right)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 f_Y(y)\,dy-M^2[Y]. \tag{41}$$

Ковариацией K_{XY} двух случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих случайных величин от их математических ожиданий:

$$K_{XY}=M\left[\left(X-m_X\right)\left(Y-m_Y\right)\right].$$

Основные свойства ковариации:

1. $K_{XX} = D[X]$.

2. $K_{XY} = M[XY] - M[X] \cdot M[Y]$. (42)

3. Если СВ X, Y независимы, то $K_{XY} = 0$.

4. $|K_{XY}| \le \sigma_X \cdot \sigma_Y$.

5. Если $|K_{XY}| = \sigma_X \cdot \sigma_Y$, то СВ X, Y связаны зависимостью $Y = kX + b$.

Формулы для вычисления ковариации дискретной системы СВ:

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(x_i - M[X]\right)\left(y_j - M[Y]\right) p_{ij}, \quad n, m \le \infty$$

или

$$K_{XY} = M[XY] - M[X] \cdot M[Y],$$

где $M[XY] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} x_i y_j, \quad n, m \le \infty.$ (43)

Формулы для вычисления ковариации непрерывной системы СВ:

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M[X]\right)\left(y - M[Y]\right) f(x, y)\, dxdy$$

или

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f(x, y)\, dxdy - M[X] \cdot M[Y]. \qquad (44)$$

Коэффициентом корреляции r_{XY} двух случайных величин X и Y называется отношение их ковариации к произведению средних квадратических отклонений:

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \ . \qquad (45)$$

Основные свойства коэффициента корреляции:

1. $|r_{XY}| \le 1$.

2. Если СВ X, Y независимы, то $r_{XY} = 0$.

3. Если $|r_{XY}| = 1$, то СВ X, Y связаны зависимостью $Y = kX + b$.

СВ X и Y называются *коррелированными*, если $r_{XY} \neq 0$.

СВ X и Y называются *некоррелированными*, если $r_{XY} = 0$.

Из определения и свойств коэффициента корреляции вытекает, что если случайные величины являются независимыми, то они являются и некоррелированными (обратное в общем случае неверно). Если случайные величины являются коррелированными, то они являются и зависимыми (обратное в общем случае неверно).

Если $r_{XY} > 0$, то между СВ имеется прямая корреляционная связь: чем выше значение одной СВ, тем выше значение другой. Если $r_{XY} < 0$, то между СВ имеется обратная корреляционная связь: чем выше значение одной СВ, тем ниже значение другой.

1.4.4. Предельные теоремы

Неравенство Маркова. Пусть неотрицательная случайная величина X имеет математическое ожидание $M[X]$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{M[X]}{\varepsilon} \text{ или } P(X < \varepsilon) \geq 1 - \frac{M[X]}{\varepsilon}.$$

Неравенство Чебышева. Пусть случайная величина X имеет математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$P(|X - M[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{D[X]}{\varepsilon^2} \text{ или } P(|X - M[X]| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D[X]}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Чебышева для биномиального распределения. Пусть случайная величина $X = m$ имеет биномиальное распределение с математическим ожиданием $M[X] = np$ и дисперсией $D[X] = npq$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$P(|m - np| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2}$$

или

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}. \qquad (46)$$

Теорема Чебышева (Закон больших чисел в форме Чебышева). Пусть случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ независимы и одинаково распределены $M[X_i]=a,\ D[X_i]=\sigma^2,\ i=1, 2, \dots,$ тогда для любого $\varepsilon>0$ выполняется

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-a\right|<\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}1.$$

Теорема Бернулли (Закон больших чисел в форме Бернулли). Пусть в схеме Бернулли вероятность наступления события A в каждом эксперименте равна p, число наступлений этого события в n независимых испытаниях равно n_A, тогда для любого $\varepsilon>0$ выполняется

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}1. \qquad (47)$$

Центральная предельная теорема. Пусть случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимы, $M[X_i]=a,\ D[X_i]=\sigma^2,\ i=1,2,\dots,n$. Введем новую случайную величину $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$, тогда $M[X]=na,\ D[X]=n\sigma^2$ и $F_n(x)$ – функция распределения случайной величины X. Пусть $\Phi_n(x)$ – функция распределения нормальной случайной величины с параметрами $na, \sigma\sqrt{n}$: $\Phi_n(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-an}{\sigma\sqrt{n}}\right)$, $\Phi(x)$ – функция Лапласа, тогда

$$F_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}\Phi_n(x).$$

Говорят, что случайная величина $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$ *асимптотически нормальна* при $n\to\infty$.

ГЛАВА 2. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Вариант 1

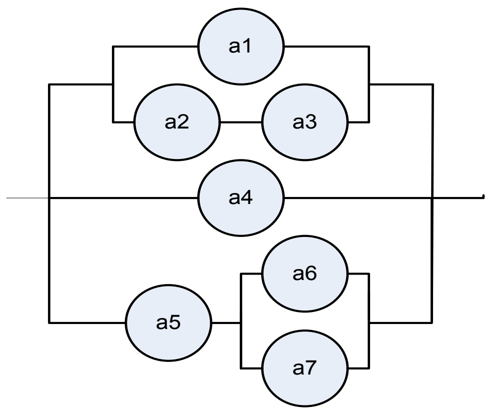
1. Сколько «слов», содержащих 5 букв, можно составить из 32 букв алфавита при условии, что любые две рядом стоящие буквы различны?

2. В вагоне едут шесть пассажиров. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на одной из пяти остановок. Какова вероятность того, что на одной остановке выйдут четыре пассажира, а на другой – два?

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{\,0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\,\}$, попадет в заданную область $d:\left\{y \le \min\left(25x^2;\ \sqrt{1{,}25(1-x)}\,\right)\right\}$.

4. На заводе по производству сотовых телефонов 10 % продукции содержит брак. Отдел контроля обнаруживает 95 % брака. Остальные телефоны поступают на реализацию. Найти вероятность того, что купленный телефон не бракован.

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. В гипермаркет поступает мука от трех производителей. Первый производитель поставляет 50 % муки, второй – 30 %, третий – 20 %. Среди муки первого производителя 40 % высшего сорта, второго – 60 %, а третьего – 80 %. Человек купил один пакет муки.

а) Определить вероятность того, что куплена мука высшего сорта.

б) Оказалось, что куплена мука высшего сорта. Какова вероятность того, что она поставлена первым производителем?

7. Вероятность успешной сдачи студентом каждого из пяти экзаменов равна 0,6. Найти вероятность успешной сдачи: а) четырех экзаменов; б) наивероятнейшего числа экзаменов; в) хотя бы трех экзаменов.

8. На производстве «Гжель» выпускают фарфоровые наперстки, которые отправляют в магазины по 200 штук в коробке. Вероятность повреждения изделий в пути равна 0,02. Найти вероятность повреждения в пути: а) более трех, но менее семи изделий; б) семи изделий в одной коробке.

9. Один раз брошены три игральные кости. СВ X принимает значение (1), если хотя бы на одной игральной кости выпадет цифра 2; значение (0), если двойка не выпала ни на одной грани, но хотя бы на одной появилась цифра 3; и значение (–1) в остальных случаях. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины *X*.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sin x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X],\ D[X],\ \sigma_X$;

в) $P\left(\left|X - M[X]\right| \le \sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины *X*.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{12}, & x \in [-2;\, 2], \\ A(x-4), & x \in (2;\, 4], \\ 0, & x \notin [-2;\, 4]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P(-3 < X < 1)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Частота процессора Intel Core i7 при выполнении некоторой однотипной работы является СВ *X*, распределенной по нормальному закону, и имеет в среднем тактовую частоту 2 100 МГц и среднее квадратическое отклонение 15 МГц. Найти вероятность того, что тактовая частота процессора будет меньше 2 070 МГц в этих условиях. Написать выражения для плотности распределения и функции распределения случайной величины *X*.

13. Ребро куба x измерено приближенно: $3 < x < 4$. Рассматривая ребро куба как СВ *X*, распределенную равномерно в интервале (3, 4), найти математическое ожидание и дисперсию объема куба.

14. Две урны содержат по восемь шаров. В первой урне один шар с № 1, три шара с № 2 и четыре шара с № 3; во второй урне три шара с № 1, четыре шара с № 2 и один шар с № 3. Из каждой урны извлекли по шару. Рассматриваются СВ X – номер шара, извлеченного из первой урны; Y – номер шара, извлеченного из второй урны. Составить закон распределения системы СВ (X, Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

$X \backslash Y$	– 4	– 2	0	2
– 3	0,08	0,09	C	0,2
– 2	0,07	0,06	0,08	0,1
– 1	0,04	0,03	0,05	0,1

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=-2$ и СВ X при $Y=0$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x,y)$ непрерывной системы СВ (X,Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} A(x+y), & \text{при } -1\le x\le 0,\ 1\le y\le 2, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x),\ f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X],\ M[Y],\ \sigma_X, \sigma_Y$;

г) $K_{XY},\ r_{XY}$.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Вероятность того, что на болванках для изготовления деревянных ложек есть трещины, равна 0,2. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что в партии из 1000 болванок отклонение числа болванок без трещин от 800 не превышает 5 %.

Вариант 2

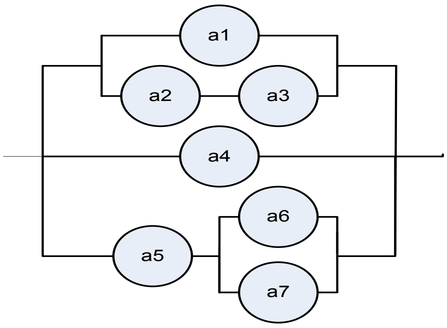
1. Студенту нужно в течение 11 дней сдать 5 экзаменов. Каким количеством способов это можно сделать?

2. Пять шаров размещают случайным образом по девяти коробкам (в каждую можно положить любое количество шаров). Какова вероятность того, что в одной коробке будет два шара, а в другой – три?

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{0\le x\le 1; 0\le y\le 1\}$, попадет в заданную область $d:\left\{y\le \min\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}; \operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}\right)\right\}$.

4. Биатлонист на тренировке стреляет по мишени до первого попадания. Вероятность того, что он попадает в первый раз, равна 0,8, а при каждом последующем выстреле – 0,95. Сколько потребуется выстрелов, чтобы вероятность поражения мишени была не менее 0,98?

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. Четыре маслозавода поставляют в гипермаркет сливочное масло 82,5 и 72,5 % жирности. Первый маслозавод поставляет 40 % сливочного масла, второй – 30 %, третий – 10 %, четвертый – 20 %. 30 % масла у первого производителя составляет масло жирности 82,5 %, 40 % – у второго производителя, 60 % – у третьего, 50 % – у четвертого. Покупатель купил пачку масла.

а) Определить вероятность того, что куплено масло 82,5 % жирности.

б) Оказалось, что куплено масло 82,5 % жирности. Какова вероятность того, что оно поставлено четвертым маслозаводом.

7. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что при пяти выстрелах будет: а) три попадания; б) наивероятнейшее число попаданий; в) хотя бы три попадания.

8. Дальтоники составляют в среднем 0,1 % населения. Найти вероятность того, что из 3000 человек окажутся: а) ровно десять дальтоников; б) не менее трех, но менее пяти дальтоников.

9. Из урны, содержащей пять синих и семь зеленых шаров, наудачу извлекают три шара без возвращения. СВ X – число извлеченных зеленых шаров. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины *X*.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sin 2x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right|\le\sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины *X*.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x+6)}{15}, & x\in[-6;-3],\\ A(x+1), & x\in(-3;-1],\\ 0, & x\notin[-6;-1].\end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P(-4<X<-2)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. В документации указано, что видеокарта ATi Radeon HD 4890 имеет частоту 900 МГц. Частота видеокарты является СВ *X*, распределенной по нормальному закону с параметрами $a=900$ МГц, $\sigma=10$ МГц. Найти вероятность того, что частота видеокарты будет превышать 910 МГц в этих условиях. Написать выражение для плотности распределения и функции распределения случайной величины *X*.

13. Ребро куба x измерено приближенно: $2<x<3$. Рассматривая ребро куба как СВ *X*, распределенную равномерно в интервале (2, 3), найти математическое ожидание и дисперсию площади поверхности куба.

14. Кубик бросают два раза. СВ: X – число появления цифры 1; Y – число появления четной цифры. Составить закон распределения системы СВ (X,Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

$X \backslash Y$	–3	0	3	6
1	0,03	0,06	0,02	0,1
3	C	0,2	0,07	0,2
5	0,05	0,04	0,05	0,1

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X = 1$ и СВ X при $Y = 6$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x, y)$ непрерывной системы СВ (X, Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} Ax^2y, & \text{при } 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 3, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. На предприятии брак составляет 2,5 % от выпускаемых деталей. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что при проверке 8000 деталей отклонение от средней доли брака составит менее 0,5 %.

Вариант 3

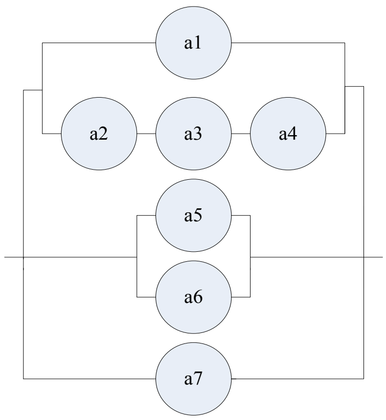
1. Каким количеством способов можно разложить семь различных флешек в две коробочки?

2. В лифт восьмиэтажного торгового центра вошли пять человек, каждый из которых выходит с равной вероятностью на любом этаже. Найти вероятность того, что на одном этаже выйдут три покупателя, а на другом – два.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$, попадет в заданную область $d:\left\{\frac{1}{x+1}-\frac{x}{2} \le y \le \cos\frac{\pi x}{2}\right\}$.

4. Вероятность перехода студента первого курса на второй равна 0,6, а вероятность успешного окончания университета равна 0,5. Найти вероятность того, что студент второго курса окончит университет.

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. На аптечном складе имеется настойка и таблетки валерианы от трех фармацевтических компаний. 20 % всей валерианы поставлено первой компанией, 35 % – второй, 45 % – третьей. Среди валерианы первой компании 50 % в таблетках, второй – 40 %, третьей – 30 %. Аптечный киоск, учитывая потребительский спрос, приобрел упаковку препарата.

а) Найти вероятность того, что была приобретена настойка.

б) Учитывая, что была приобретена настойка, определить вероятность того, что она произведена третьей компанией.

7. В урне 15 желтых и 30 зеленых шаров. С возвращением вынули 6 шаров. Найти вероятность что, среди вынутых было: а) два зеленых; б) наивероятнейшее число зеленых шаров; в) хотя бы пять зеленых шаров.

8. Устройство состоит из 2500 независимо работающих узлов. Вероятность отказа одного из них в течение гарантийного срока равна 0,002. Найти вероятность отказа в течение гарантийного срока: а) ровно четырех узлов; б) не менее трех, но менее шести узлов.

9. Испытанию подвергаются три прибора, причем вероятность выдержать испытание для первого равна 0,8; для второго – 0,95; для третьего – 0,7. СВ X – число приборов, не выдержавших испытания. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sin 3x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{6}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X],\ D[X],\ \sigma_X$;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right| \le \sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases} A(x+3), & x \in [-3;0], \\ \dfrac{5-x}{20}, & x \in (0;5], \\ 0, & x \notin [-3;5]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X],\ D[X],\ \sigma_X$;

г) $P(3 < X < 7)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Скорость Download передачи данных интернет-провайдером является СВ X и подчинена нормальному закону с параметрами $a=90$ Мбит/с, $\sigma=1{,}5$ Мбит/с. Найти вероятность того, что скорость Download передачи данных превысит 93 Мбит/с. Написать выражение для плотности распределения и функции распределения случайной величины X.

13. Поезда метро идут с интервалом в 5 минут. Пассажир приходит на остановку в некоторый момент времени. Какова вероятность появления пассажира не ранее чем через 2 минуты после ухода предыдущего поезда, но не позднее чем за 2 минуты до прихода следующего. Найти математическое ожидание и дисперсию СВ X – времени ожидания пассажира.

14. По мишени стреляют дважды. Вероятность поражения мишени при первом выстреле равна 0,7, при втором – 0,9. СВ X – число попаданий первым выстрелом; Y – число попаданий вторым выстрелом. Составить закон распределения системы СВ (X, Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

X \ Y	–2	–1	0	1
– 4	0,02	0,07	0,01	0,02
– 1	0,08	0,3	0,1	0,09
2	0,05	C	0,03	0,03

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=2$ и СВ X при $Y=-1$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x,y)$ непрерывной системы СВ (X,Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} Axy^3, & \text{при } 2\le x\le 4,\ 0\le y\le 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. СВ X имеет биномиальное распределение. В каждом из испытаний событие A может произойти с вероятностью $p=0{,}6$. Сколько раз нужно повторить испытания, чтобы вероятность отклонения относительной частоты появления события A от вероятности его появления в одном испытании на величину, меньшую 0,1, была больше 0,97? (Сделать оценку с помощью неравенства Чебышева.)

Вариант 4

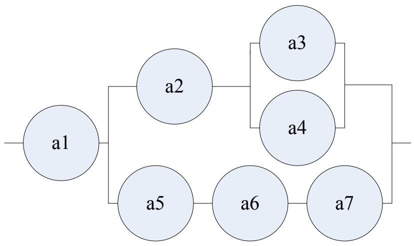
1. Четверо студентов сдают экзамен. Каким количеством способов могли быть поставлены им отметки, если известно, что все студенты экзамен сдали?

2. Шесть шаров размещают случайным образом по 11 коробкам (в каждую можно положить любое количество шаров). Какова вероятность того, что в одной коробке будет четыре шара, а в другой – два?

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{0\le x\le 1; 0\le y\le 1\}$, попадет в заданную область $d:\left\{\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{2}\le y\le \sin\dfrac{\pi x}{2}\right\}$.

4. На производстве мониторов с конвейера сходит 3 % бракованных изделий. Служба контроля обнаруживает 95 % брака. Остальные мониторы попадают в розничную сеть продаж. Найти вероятность того, что купленный монитор не бракован.

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. В магазин поставляется минеральная вода с объемом тары 0,5 и 1,5 л от четырех производителей в соотношении 1:2:3:4. 90 % бутылок у первого производителя составляют бутылки объемом 0,5 л, 75 % – у второго, 40 % – у третьего, 50 % – у четвертого. Покупатель приобрел бутылку минеральной воды.

а) Найти вероятность того, что была приобретена бутылка объемом 1,5 л.

б) Покупатель приобрел бутылку объемом 1,5 л. Найти вероятность того, что она от четвертого производителя.

7. Плотность раствора определяют семь раз. Вероятность того, что она превысит 1000 кг/м^3 в одном эксперименте, равна 0,8. Найти вероятность того, что плотность будет ниже 1000 кг/м^3: а) в трех экспериментах; б) в наивероятнейшем числе экспериментов; в) хотя бы в двух экспериментах.

8. Неопытная машинистка сделала 1600 опечаток на 500 страницах. Найти вероятность того, что на одной странице: а) шесть опечаток; б) по крайней мере три опечатки.

9. В партии из 20 деталей 3 бракованные. Наудачу отобрали шесть деталей. СВ X – число бракованных изделий среди шести отобранных. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 1-\sin x, & \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi, \\ 1, & x>\pi. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right|\le\sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x+4)}{21}, & x\in[-4;-1],\\ A(x-3), & x\in(-1;3],\\ 0, & x\notin[-4;3].\end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P(-2<X<2)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Скорость Upload передачи данных интернет-провайдером является СВ X и подчинена нормальному закону распределения с параметрами $a=80$ Мбит/с, $\sigma=2$ Мбит/с. Найти вероятность того, что скорость Upload передачи данных будет ниже 75 Мбит/с. Написать выражение для плотности распределения и функции распределения случайной величины X.

13. Цена деления шкалы амперметра равна 0,2. Показания прибора округляются до ближайшего деления. Считая, что ошибки измерения распределены равномерно, найти вероятность того, что при измерении будет сделана ошибка, меньшая, чем 0,04, но большая, чем 0,03.

14. Два спортсмена независимо друг от друга производят по два выстрела, каждый по своей мишени. Вероятность поражения мишени для первого спортсмена составляет 0,5, для второго – 0,9. СВ X – число попаданий первого спортсмена; Y – число попаданий второго спортсмена. Составить закон распределения системы СВ (X,Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

$X \backslash Y$	–1	1	3	5
– 1	0,03	0,05	0,1	0,1
0	0,02	0,06	0,2	0,2
1	0,03	0,04	0,07	C

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=-1$ и СВ X при $Y=3$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x, y)$ непрерывной системы СВ (X, Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} A(2x+y), & \text{при } 1 \le x \le 2,\ -3 \le y \le 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Среди отобранных 2500 воздушных шариков оказалось 50 зеленых. Относительная частота изготовления зеленых шариков принята за приближенное значение вероятности изготовления зеленых шариков. С какой вероятностью можно ожидать, что допущенная при этом абсолютная погрешность не будет превышать 0,02 (оценить с помощью неравенства Чебышева)?

Вариант 5

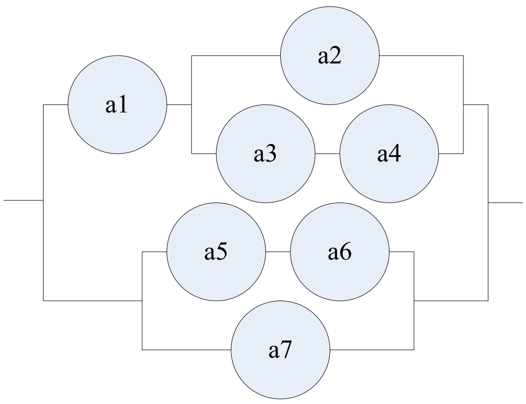
1. Группа детей из 12 человек рассаживается на обед по четверо за три столика. Сколькими способами можно рассадить детей?

2. Найти вероятность получить 12 очков хотя бы один раз при 10 бросаниях двух игральных костей.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$, попадет в заданную область $d:\left\{\frac{1}{32x} \le y \le \frac{3}{8} - x\right\}$.

4. Фильм попадет в список кандидатов на премию «Оскар – 2015», если он вышел в 2014 году и показан в коммерческом прокате не менее 7 дней подряд. Найти вероятность того, что фильм будет в коммерческом прокате не менее 7 дней подряд, если он попадает в список кандидатов на «Оскар – 2015» с вероятностью 0,001, а вероятность его выхода в 2014 году – 0,95.

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. Магазин хозяйственных товаров торгует резиновыми перчатками с хлопковым напылением и без напыления от трех поставщиков. Перчатки поступают от трех производителей в соотношении 2:3:5. Среди перчаток от первого поставщика 60 % имеют напыление, от второго – 40 %, от третьего – 30 %. Покупатель приобрел одну пару перчаток.

а) Найти вероятность того, что были приобретены перчатки с напылением.

б) Покупатель приобрел перчатки с напылением. Найти вероятность того, что они от второго поставщика.

7. Игральную кость бросают шесть раз. Найти вероятность того, что число 3 появится: а) три раза; б) наивероятнейшее число раз; в) хотя бы один раз.

8. Вероятность изготовления некачественного RW-диска равна 0,003. Среди какого количества случайно отобранных дисков можно с вероятностью 0,9 ожидать отсутствие бракованных? Какова вероятность того, что среди 1000 дисков будет более трех бракованных?

9. Наудачу выбирается трехзначное число. СВ X – число пятерок в этом числе. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины *X*.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2\pi}(x - \sin x), & 0 \le x \le 2\pi, \\ 1, & x > 2\pi. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P(|X - M[X]| \le \sigma_X)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины *X*.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{6}, & x \in [5; 8], \\ A(x-9), & x \in (8; 9], \\ 0, & x \notin [5; 9]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P(2 < X < 7)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Плотность автомобильного бензина марки АИ-95 является СВ *X* и подчинена нормальному закону с параметрами $a = 750$ кг/м^3, $\sigma = 25$ кг/м^3 при 15 °С. Найти вероятность того, что плотность бензина попадает в интервал от 745 до 765 кг/м^3. Написать выражение для плотности распределения и функции распределения СВ *X*.

13. СВ *X*, распределенная равномерно, имеет числовые характеристики $M[X]=4; D[X]=3$. Найти функцию распределения, плотность распределения и $p(3 \le X \le 4)$.

14. Симметричную монету подбрасывают три раза. СВ X – число гербов, выпавших в первом и втором испытаниях; Y – число гербов, выпавших во втором и третьем испытаниях. Составить закон распределения системы СВ (X, Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

X \ Y	2	3	4	5
– 2	0,03	0,07	0,09	0,01
0	0,08	0,2	0,2	0,05
2	0,1	0,05	C	0,02

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=0$ и СВ X при $Y=4$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x, y)$ непрерывной системы СВ (X, Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} A(x-3y), & \text{при } 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x),\ f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X],\ M[Y],\ \sigma_X, \sigma_Y$;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Вероятность производства стандартной детали равна 0,98. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что среди 3000 изготовленных деталей число нестандартных находится в границах от 30 до 90 (включительно).

Вариант 6

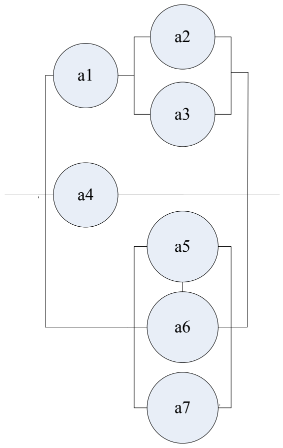
1. В коробке десять черных ручек и восемь красных. Каким количеством способов можно взять три ручки так, чтобы среди них было две черные и одна красная?

2. Тридцать студентов уезжают на практику в города А (пятнадцать мест), В (семь мест), С (восемь мест). Найти вероятность того, что трое друзей попадут на практику в один город.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$, попадет в заданную область $d:\left\{\dfrac{7}{32x} \le y \le \dfrac{9}{8} - x\right\}$.

4. Баскетболист бросает мяч в корзину. Вероятность попадания в корзину при первом броске равна 0,3, а при каждом следующем – 0,8. Сколько бросков нужно сделать, чтобы вероятность попадания была не менее 0,99?

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. Агрофирма «Белая дача» ежемесячно выращивает и поставляет артишоки, спаржу, фенхель. Доля выращиваемых овощей в данной группе составляют 50, 40 и 10 % соответственно. Иногда потребительский спрос на какую-то продукцию снижается и тогда при поставке ее в торговую сеть делают скидки. В среднем на артишоки делают скидки в 10 % случаев, на спаржу – в 15 %, на фенхель – в 5 %.

а) Найти вероятность того, что в данный месяц была сделана скидка на какие-то овощи.

б) Была сделана скидка на овощи. Найти вероятность того, что была сделана скидка на фенхель.

7. Спортсмен прыгает в высоту пять раз. Вероятность того, что он возьмет высоту 2,33 м при одной попытке, равна 0,7. Найти вероятность того, что эта высота покорится: а) два раза; б) наивероятнейшее число раз; в) хотя бы четыре раза.

8. Вероятность изготовления некачественной флешки равна 0,004. Среди какого количества случайно отобранных флешек можно с вероятностью 0,89 ожидать отсутствия бракованных? Какова вероятность, что из 2000 флешек будет более четырех бракованных?

9. В коробке находится 12 теннисных мячей, среди которых десятью уже играли. Для очередной игры взяли шесть мячей, после которой их опять положили в коробку. СВ X – число новых мячей после этой игры. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины *X*.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -\dfrac{\pi}{4}, \\ \dfrac{1+\sin 2x}{2}, & -\dfrac{\pi}{4} < x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right| \le \sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases} A\left(x+8\right), & x\in\left[-8;-5\right], \\ -\dfrac{x+2}{9}, & x\in\left(-5;-2\right], \\ 0, & x\notin\left[-8;-2\right]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M\left[X\right]$, $D\left[X\right]$, σ_X;

г) $P\left(-6< X <-4\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Октановое число автомобильного бензина марки АИ-95 является СВ X и подчинено нормальному закону с параметрами $a=95$, $\sigma=0{,}3$. Найти вероятность того, что плотность бензина будет не менее 95,3. Написать выражения для плотности распределения и функции распределения СВ X.

13. Известно, что вам могут позвонить в любой момент времени между 11 и 13 часами. Какова вероятность того, что звонка придется ждать не более 15 минут? Найти математическое ожидание и дисперсию СВ X – времени ожидания звонка.

14. Среди 20 лотерейных билетов есть 3 выигрышных. Сначала один билет вытягивает барышня, затем один билет вытягивает хулиган. СВ X – число выигрышных билетов у барышни; Y – число выигрышных билетов у хулигана. Составить закон распределения системы СВ $\left(X, Y\right)$. Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ $\left(X, Y\right)$:

X \ Y	– 4	– 3	– 2	– 1
– 1	C	0,06	0,05	0,01
1	0,2	0,04	0,1	0,2
3	0,02	0,03	0,2	0,04

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=3$ и СВ X при $Y=-2$;

г) $M[X],\ M[Y],\ \sigma_X, \sigma_Y$;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x,y)$ непрерывной системы СВ (X, Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} Axy, & \text{при } -2\le x\le 0,\ 1\le y\le 2, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x),\ f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X],\ M[Y],\ \sigma_X, \sigma_Y$;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Монета подбрасывается 3000 раз. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что отклонение относительной частоты появления герба от вероятности его появления при одном броске будет меньше, чем 0,15.

Вариант 7

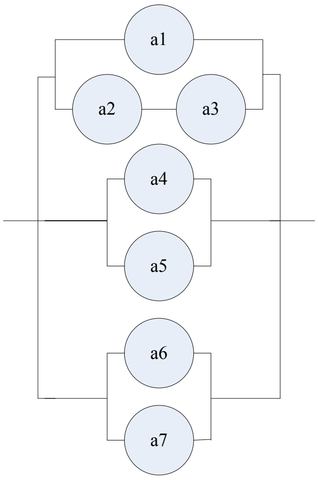
1. Студенту нужно в течение восьми дней сдать четыре экзамена так, чтобы в последний день был экзамен. Каким количеством способов это можно сделать?

2. Десять шаров разных цветов выстраивают в линию. Найти вероятность того, что между зеленым и фиолетовым шарами будут находиться ровно три шара других цветов.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\left\{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\right\}$, попадет в заданную область $d:\left\{y \le \min\left(16x^2; \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1-x}\right)\right\}$.

4. Студент отвечает на вопросы экзаменатора. Вероятность того, что он верно ответит на первый вопрос, равна 0,5. Если он правильно ответит на этот вопрос, то ему задают второй. Вероятность того, что оба ответа будут правильными, равна 0,45. Найти вероятность, что он верно ответит на второй вопрос.

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. Анна Ивановна на даче посадила 3 гортензии, 12 роз и 10 хризантем. Эти растения требуют особого укрытия и все-таки иногда вымерзают. В Сибири в суровые зимы вымерзают в среднем 60 % гортензий, 50 % роз и 20 % хризантем. Весной было освобождено от укрытия одно из растений.

а) Найти вероятность того, что это растение успешно перезимовало.

б) Растение успешно перезимовало. Найти вероятность того, что это была гортензия.

7. Спортсмен с шестом прыгает восемь раз. Вероятность того, что высота 5,85 м будет взята спортсменом при одной попытке, равна 0,6. Найти вероятность того, что спортсмен возьмет высоту: а) четыре раза; б) наивероятнейшее число раз; в) хотя бы шесть раз.

8. В среднем 0,5 % студентов не имеют ноутбуков. Какова вероятность того, что из 500 студентов факультета: а) не менее четырех не имеют ноутбука; б) не имеют ноутбука пять студентов.

9. В мишень выстрелили четыре раза. Вероятность одного попадания в мишень 0,7. СВ X – число попаданий в мишень. Найти: а) закон распределения СВ *X*; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины *X*.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-\dfrac{\pi}{12}, \\ \dfrac{1+\sin 6x}{2}, & -\dfrac{\pi}{12}\le x\le \dfrac{\pi}{12}, \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{12}. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X],\ D[X],\ \sigma_X$;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right|\le \sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины *X*.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+3}{5}, & x\in[-3;-1], \\ A(x-2), & x\in(-1;2], \\ 0, & x\notin[-3;2]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X],\ D[X],\ \sigma_X$;

г) $P(0<X<4)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Индукционный период автомобильного бензина марки АИ-95 является СВ X и подчинен нормальному закону с параметрами $a=360$ мин, $\sigma=10$ мин. Какие размеры периода можно гарантировать с вероятностью 0,9? Написать выражения для плотности распределения и функции распределения СВ *X*.

13. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 15 с; более чем на 20 с.

14. Система СВ (X, Y) определяется таким образом: если при подбрасывании игральной кости выпадает четное число очков, то $X = 1$, в противном случае $X = 0$; $Y = 1$, когда число очков кратно 3, в противном случае $Y = 0$. Составить закон распределения системы СВ (X, Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

$X \backslash Y$	– 2	0	2	4
– 4	0,1	C	0,05	0,04
– 3	0,2	0,02	0,2	0,06
– 2	0,07	0,03	0,1	0,05

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=-4$ и СВ X при $Y=2$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x, y)$ непрерывной системы СВ (X, Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} A\left(3x+y\right), & \text{при } 1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Игральная кость подбрасывается 30000 раз. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что относительная частота появления цифры 2 отличается от вероятности этого события на величину, меньшую, чем 0,04.

Вариант 8

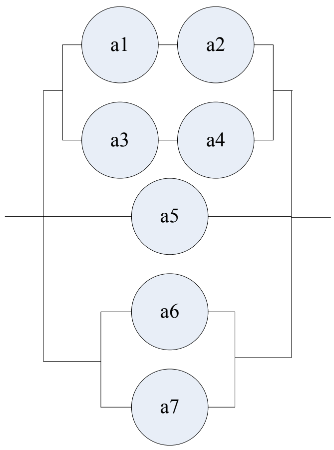
1. У одного студента есть семь разных шляп, а у другого – девять. Каким количеством способов они могут обменять три шляпы одного на три шляпы другого?

2. Восемь шаров разных цветов выстраивают в линию. Найти вероятность того, что между синим и желтым шарами будут находиться ровно два шара.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$, попадет в заданную область $d:\left\{y \le \min\left(\sqrt{2(1-x)};\ \log_{\frac{3}{2}}\sqrt{1+x}\right)\right\}$.

4. Вероятность того, что баскетболист сумеет бросить мяч по кольцу, равна 0,4. Вероятность того, что мяч попадет в корзину, равна 0,1. Найти вероятность того, что баскетболист принесет очки команде, если ему достался мяч.

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

a1	*a2*	*a3*	*a4*	*a5*	*a6*	*a7*
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. У Ивана Петровича на даче растут три сорта крупноплодных томатов: «русский размер» (8 кустов), «хурма» (10 кустов), «бычье сердце» (12 кустов). Процент крупных плодов (более 400 г) на кустах различный: 80, 30 и 50 % соответственно. Иван Петрович взял помидор для салата.

а) Найти вероятность того, что ему попался крупный помидор.

б) Был взят крупный помидор. Найти вероятность того, что взятый помидор сорта «бычье сердце».

7. Спортсмен прыгает в воду шесть раз. Вероятность того, что он наберет за один прыжок более 80 очков, равна 0,3. Найти вероятность того, что спортсмен наберет более 80 очков: а) четыре раза; б) наивероятнейшее число раз; в) хотя бы пять раз.

8. Бракованные изделия составляют 3 % всей продукции завода. Какова вероятность того, что из 300 наудачу взятых изделий окажется: а) не более трех некачественных изделий; б) четыре или пять некачественных изделий.

9. В ящике лежат 13 деталей, среди которых 10 стандартных. Наудачу выбирают 3 детали. СВ X – число стандартных деталей среди отобранных. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \dfrac{x-0{,}5\sin 2x}{\pi}, & 0<x<\pi,\\ 1, & x\ge\pi. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X],\ D[X],\ \sigma_X$;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right|\le\sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases} A(x+6), & x\in[-6;-2],\\ \dfrac{2-x}{16}, & x\in(-2;2],\\ 0, & x\notin[-6;2]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P(-3< X <1)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Срок службы стартерной аккумуляторной батареи (АКБ) автомобиля является СВ X и подчинен нормальному закону распределения. При малом пробеге и умеренном режиме эксплуатации автомобиля аккумулятор будет служить в среднем четыре года. Найти среднее квадратическое отклонение срока службы аккумуляторной батареи, если известно, что 80 % батарей проработают в этих условиях от трех до пяти лет. Написать выражения для плотности распределения и функции распределения X.

13. Из бидона, содержащего 3 л молока, отлили некоторую часть. Какова вероятность, что в бидоне останется не более 1,5 л молока? Найти математическое ожидание и дисперсию СВ X – количества молока в бидоне.

14. Игральную кость бросают два раза. СВ X – число появления цифры 2; Y – число появления нечетной цифры. Составить закон распределения системы СВ (X, Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

X \ Y	– 3	– 1	1	3
0	0,02	0,05	0,04	0,06
1	0,08	0,2	0,1	C
2	0,02	0,1	0,06	0,07

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=1$ и СВ X при $Y=-3$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x,y)$ непрерывной системы СВ (X, Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} A\left(x+2y\right), & \text{при } -1\le x\le 1,\ 1\le y\le 2, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Производится 700 независимых испытаний. В каждом из них событие А появляется с вероятностью 0,4. Какое максимально возможное отклонение относительной частоты появления события А от 0,4 можно ожидать с вероятностью 0,98? (Сделать оценку с помощью неравенства Чебышева.)

Вариант 9

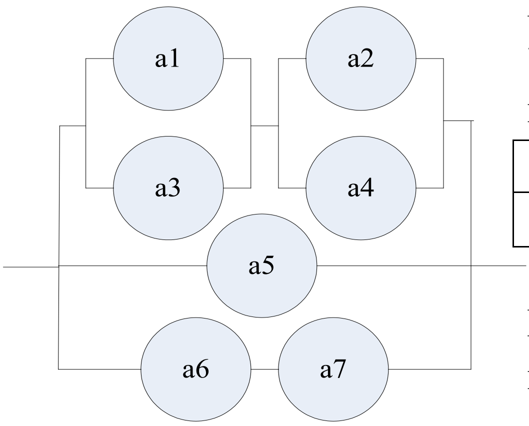
1. Из группы, состоящей из семи мужчин и четырех женщин, надо выбрать шесть человек так, чтобы среди них было не менее двух женщин. Каким количеством способов это можно сделать?

2. Из 10 книг, находящихся на книжной полке, четыре сборника стихов. Найти вероятность того, что взятые наугад три книги – сборники стихов.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{\,0\le x\le 1; 0\le y\le 1\,\}$, попадет в заданную область $d:\left\{y\le \min\left(\sqrt{ex};\,|\ln x|\right)\right\}$.

4. Сколько нужно взять игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,8, можно ожидать выпадения трех очков хотя бы на одной кости?

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. Наличие вещества кукурбитацин в огурцах придает им горький вкус. Считается, что горькие огурцы полезны для здоровья. Мария Николаевна выращивает три сорта огурцов на своем дачном участке: «отелло» (4 куста), «дездемона» (6 кустов) и «конкурент» (2 куста). Среди огурцов сорта «отелло» горькие плоды составляют 10 %, «дездемона» – 5 %, «конкурент» – 30 %. Мария Николаевна взяла один огурец.

а) Найти вероятность того, что ей попался горький огурец.

б) Был взят горький огурец. Найти вероятность того, что взятый огурец сорта «конкурент».

7. В течение дня температуру больному меряют шесть раз. Вероятность того, что она каждый раз будет выше нормальной, равна 0,8. Найти вероятность того, что градусник покажет температуру выше нормальной: а) четыре раза; б) наивероятнейшее число раз; в) хотя бы три раза.

8. Сложное электронное устройство состоит из 1000 элементов, каждый из которых независимо от остальных выходит из строя за время T с вероятностью 0,003. Найти вероятность того, что: а) за время T откажут ровно четыре элемента; б) за время T откажут более трех элементов.

9. В коробке лежат 12 гвоздей и 8 шурупов. Наудачу выбирают три крепежа. СВ X – число выбранных гвоздей. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины *X*.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ 0{,}5\left(1+\sin x\right), & -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P\left(\left| X - M[X]\right| \le \sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины *X*.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{14}, & x \in [-2; 2], \\ A\left(x-5\right), & x \in (2; 5], \\ 0, & x \notin [-2; 5]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P\left(-1 < X < 3\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Срок службы светодиодной лампы является СВ X и подчинен нормальному закону распределения. Ее средний срок службы равен 60000 ч, а среднее квадратическое отклонение равно 3000 ч. Какой срок службы светодиодной лампы можно гарантировать с вероятностью 0,95? Написать выражения для плотности распределения и функции распределения СВ *X*.

13. Среднее время ремонта сложной техники в сервисном центре равно 16 дням. Найти вероятность того, что: а) на ремонт планшета потребуется не менее 10 дней; б) на ремонт телефона потребуется от 17 до 20 дней.

14. Игральную кость бросают два раза. СВ X – индикатор четности суммы очков (т. е. $X = 1$, если сумма четная, и $X = 0$ в противном случае); Y – индикатор четности произведения очков (т. е. $Y = 1$, если произведение четно, и $Y = 0$ в противном случае). Составить закон распределения системы СВ (X, Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

X \ Y	– 1	0	1	2
1	0,1	0,01	0,2	0,04
3	0,05	0,03	C	0,06
5	0,02	0,1	0,09	0,2

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=3$ и СВ X при $Y=-1$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x, y)$ непрерывной системы СВ (X, Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} Axy^2, & \text{при } 0 \le x \le 1,\ -2 \le y \le -1, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Число смартфонов составляет в среднем 60 % от общего числа телефонов. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что в партии из 800 телефонов доля смартфонов отличается от средней не более чем на 0,03.

Вариант 10

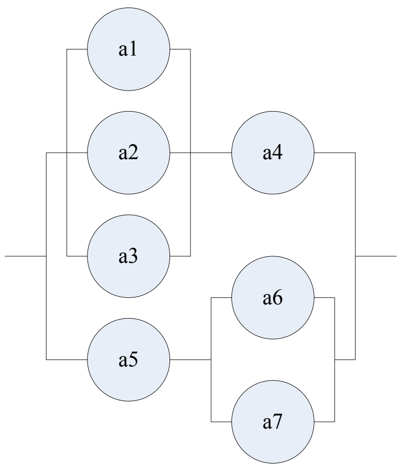
1. У мальчика пять друзей. Ежедневно в течение 10 дней он приглашает к себе трех гостей так, чтобы компания ни разу не повторилась. Каким количеством способов он может это сделать?

2. Одиннадцать шаров разных цветов выстраивают в линию. Найти вероятность того, что между красным и белым шарами будет находиться ровно четыре шара других цветов.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{\,0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\,\}$, попадет в заданную область $d:\left\{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4} \le y \le x|2-x|\right\}$.

4. Два игрока по очереди бросают игральную кость. Выигрывает тот, у которого первым выпадет шесть очков. Найти вероятность выигрыша игрока, бросающего игральную кость первым.

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. Василий Иванович треть семян томатов обработал стимулятором роста эпином, треть семян – цирконом. Эпин приводит к повышению урожайности томатов в среднем на 18 %, циркон – на 21 %, а остальные семена он не обрабатывал. Василий Иванович проанализировал урожайность одного куста томатов.

а) Найти вероятность того, что урожайность этого куста была повышена.

б) Был взят куст томатов повышенной урожайности. Найти вероятность того, что он был обработан цирконом.

7. Лучник стреляет восемь раз. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена: а) пять раз; б) наивероятнейшее число раз; в) хотя бы семь раз.

8. В среднем 2 % студентов носят контактные линзы. Найти вероятность того, что из 400 студентов факультета: а) не менее четырех носят контактные линзы; б) контактные линзы носят трое или пятеро студентов.

9. В сумке находятся 10 чехлов для телефона Nokia и 8 чехлов для телефона Samsung. Наудачу достают три чехла. СВ X – число чехлов для телефона Nokia. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -\dfrac{\pi}{6}, \\ 0{,}5\left(1+\sin 3x\right), & -\dfrac{\pi}{6} < x \le \dfrac{\pi}{6}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right| \le \sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases} A\left(x+7\right), & x \in [-7;-5], \\ -\dfrac{x+3}{4}, & x \in (-5;-3], \\ 0, & x \notin [-7;-3]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P(-4 < X < 0)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Срок службы лампы накаливания является СВ X и подчинен нормальному закону распределения. Ее средний срок службы равен 1000 ч, а среднее квадратическое отклонение равно 75 ч. Какова вероятность того, что лампа проработает не менее 1100 ч? Написать выражение для плотности распределения и функции распределения СВ X.

13. Автобусы подходят к остановке с интервалом в 5 мин. Найти вероятность того, что ожидание составит менее 2 мин. Найти функцию распределения и плотность распределения СВ X – времени ожидания автобуса.

14. Два раза стреляют по мишени в неизменных условиях. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. СВ X – число выстрелов до первого попадания (включительно); Y – число промахов. Составить закон распределения системы СВ (X, Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

$X \backslash Y$	1	2	3	4
– 4	0,03	0,08	0,06	0,04
– 2	0,07	0,2	0,2	0,09
0	C	0,1	0,1	0,01

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=0$ и СВ X при $Y=2$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x,y)$ непрерывной системы СВ (X, Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} Ax^3y, & \text{при } 1 \le x \le 3,\ 2 \le y \le 3, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x),\ f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X],\ M[Y],\ \sigma_X, \sigma_Y$;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. При изготовлении сувениров установлено, что брак составляет 5 %. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что при просмотре партии в 3000 сувениров констатируется отклонение от установленного процента менее чем на 1 %.

Вариант 11

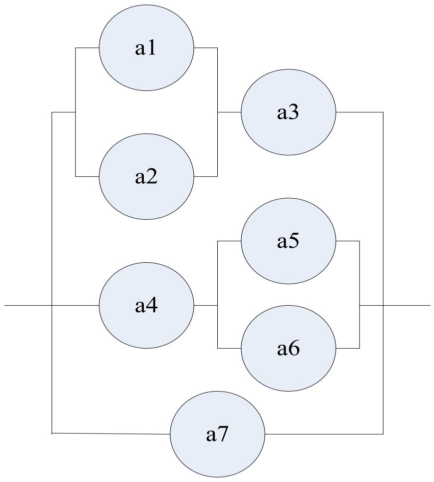
1. В киоске продают пирожные 10 видов. Каким количеством способов можно купить 12 пирожных?

2. В лифт шестиэтажного дома входит семь человек. Каждый пассажир выходит с равной вероятностью на любом этаже. Найти вероятность того, что на четвертом этаже выйдут четверо, а на пятом – трое.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D: \{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$, попадет в заданную область $d: \left\{1 - \sqrt{1 - x^2} \le y \le \sqrt{2} \sin \frac{\pi x}{4}\right\}$.

4. 70 % студентов на зачете пытаются пользоваться мобильной связью. В 90 % случаев преподаватель замечает это и переносит для этих студентов зачет на другой день. Остальные студенты сдают зачет. Сколько студентов (в процентном отношении) сдали зачет в этот день?

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. В опытном хозяйстве 90 % всех семян обработали стимуляторами роста. Если семена были обработаны, то лишь 0,05 % выросших из этих семян растений подвержены заболеваниям, для необработанных семян этот процент выше – 1,2 %.

а) Найти вероятность того, что случайно взятое растение не болело.

б) Было взято здоровое растение. Найти вероятность того, что семена этого растения не были обработаны.

7. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,9. Найти вероятность того, что, стреляя семь раз, стрелок попадет в цель: а) три раза; б) наивероятнейшее число раз; в) хотя бы шесть раз.

8. 0,2 % кошек имеют разноцветные глаза. Найти вероятность того, что из 1000 кошек питомника разные глаза имеют: а) менее шести кошек; б) ровно семь кошек.

9. По цели стреляют три раза и вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. За каждое попадание стрелок получает три очка, а за каждый промах у него вычитают одно очко. СВ X – число полученных стрелком очков. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины *X*.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le 0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right|\le\sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+3}{8}, & x\in[-3;-1], \\ A, & x\in(-1;2], \\ 0, & x\notin[-3;2]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P(-2< X <0)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Срок службы энергосберегающей лампы является СВ X и подчинен нормальному закону распределения. Ее средний срок службы равен 15000 ч, а среднее квадратическое отклонение равно 1000 ч. Какова вероятность того, что лампа проработает от 14000 до 17000 ч? Написать выражения для плотности распределения и функции распределения СВ X.

13. Время ожидания в очереди имеет показательный закон распределения со средним временем ожидания 15 мин. Какова вероятность того, что: а) покупатель потратит в магазине не менее 5 и не более 10 мин, б) более 12 мин?

14. Система СВ определяется следующим образом: число X выбирается случайным образом из множества целых чисел {2, 5, 8}, затем из этого же множества выбирается наудачу число Y, большее первого или равное ему. Составить закон распределения системы СВ (X, Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

X \ Y	-4	-1	2	5
0	0,1	0,06	0,04	0,05
2	0,08	C	0,05	0,07
4	0,2	0,2	0,03	0,02

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=4$ и СВ X при $Y=-1$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x,y)$ непрерывной системы СВ (X, Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} A(x+y), & \text{при } 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 3, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Число флешек объемом 16 Гб составляет в среднем 45 % от общего числа их выпуска. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что в партии из 600 флешек доля флешек данного объема отклоняется от средней не более чем на 0,08.

Вариант 12

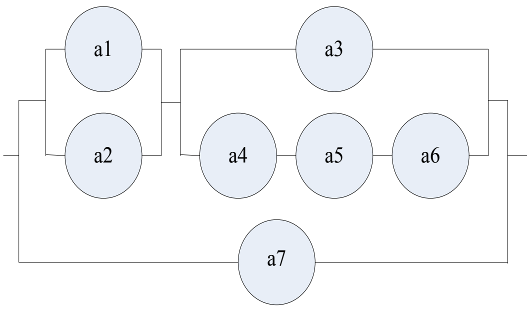
1. 12 магнитов лежат на столе по кругу так, что любой магнит отталкивается от соседних (и только от них). Нужно выбрать пять магнитов так, чтобы среди них не было взаимно отталкивающихся. Сколькими способами это можно сделать?

2. В коробке лежат пять желтых, четыре оранжевых и семь сиреневых носовых платков. Найти вероятность того, что три взятых наудачу платка одного цвета.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$, попадет в заданную область $d:\left\{y \le \min\left(\sqrt{1{,}5\,(1-x)};\ \log_{\frac{4}{3}}(1+x)\right)\right\}$.

4. Класс оборудован 15 компьютерами, пять из которых неисправны. Какова вероятность того, что студент сядет за исправный компьютер, если он может сделать не более трех попыток.

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. В баскетбольной команде пять игроков. Вероятности передач на каждого из них зависят от результативности их бросков по корзине и относятся как 3:3:2:1:1. Получив передачу, игроки забивают мяч в корзину с вероятностями 0,8; 0,7; 0,5; 0,4; 0,3 соответственно.

а) Найти вероятность того, что после передачи на одного из игроков команды будет забит мяч.

б) Был забит мяч одним из игроков команды. Найти вероятность того, что мяч забил игрок под вторым номером.

7. Нормальное давление газа в трубе 101 кПа. Вероятность того, что оно ниже нормы в одном эксперименте равна 0,7. Определить вероятность того, что из восьми измерений давление будет выше нормы: а) три раза; б) наивероятнейшее число раз; в) хотя бы четыре раза.

8. Автомобили «Жигули» составляют 0,3 % от общего числа автомобилей. Найти вероятность того, что на парковке в 2000 мест находятся: а) ровно 7 автомобилей «Жигули»; б) больше 7, но меньше 10 машин «Жигули».

9. В партии из семи изделий одно бракованное. Чтобы его обнаружить, проверяют изделия одно за другим. СВ X – число проверенных изделий. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1-\cos x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right| \le \sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}, & x \in [-2;\,0], \\ A(x-4), & x \in (0;\,4], \\ 0, & x \notin [-2;\,4]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P(2 < X < 6)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Длина самореза является СВ X и подчинена нормальному закону распределения с параметрами $a = 76$ мм, $\sigma = 1$ мм. Найти вероятность того, что длина самореза будет менее 75 мм. Написать выражения для плотности распределения и функции распределения СВ X.

13. Длительность безотказной работы прибора имеет показательное распределение с параметром 0,01. Найти вероятность того, что за время $x = 70$ ч: а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

14. Из колоды в 32 карты достают одну карту. СВ X – число вынутых королей; Y – число вынутых карт пиковой масти. Составить закон распределения системы СВ (X, Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

$X \backslash Y$	0	1	2	3
– 3	0,05	0,02	0,07	C
0	0,2	0,06	0,2	0,1
3	0,07	0,02	0,1	0,08

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=-3$ и СВ X при $Y=2$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x, y)$ непрерывной системы СВ (X, Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} Ax^2 y, & \text{при } -1 \le x \le 0,\ 1 \le y \le 2, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Дисперсия каждой из 3000 независимых СВ не превышает 8. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих СВ от среднего арифметического их математических ожиданий не превысит 0,2.

Вариант 13

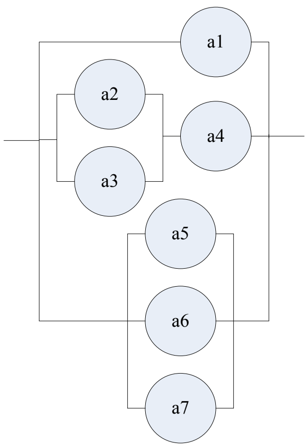
1. В купе поезда есть два дивана по пять мест на каждом. Из десяти пассажиров четверо желают сидеть по движению поезда, трое – против движения, а остальным безразлично, где сидеть. Каким количеством способов могут разместиться пассажиры?

2. В коробке лежат семь зеленых, пять фиолетовых и восемь голубых кепок. Найти вероятность того, что три взятых наудачу кепки разных цветов.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$, попадет в заданную область $d:\left\{y \le \min\left(\sqrt{\frac{4}{3}(1-x)};\ \log_{1,25}(1+x)\right)\right\}$.

4. Среди 20 билетов лотереи 4 выигрышных. Найти вероятность вытащить выигрышный билет, если дается не более четырех попыток.

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. За неспортивный (технический) удар соперника в баскетболе назначается штрафной бросок потерпевшей стороне. В предыдущих играх команд А и В игроки команды А чаще получали штрафные броски, чем игроки команды В. Из десяти штрафных, как правило, шесть приходится на команду А. Половина бросков у команды А являются успешными, а у команды В этот процент выше – 60 %.

а) Был назначен штрафной бросок. Найти вероятность того, что он будет успешным.

б) Штрафной бросок оказался успешным. Найти вероятность того, что штрафной получила команда А.

7. В гараже числятся 12 машин. Вероятность выхода из строя одной машины равна 0,15. Найти вероятность: а) выхода из строя 4 машин; б) наивероятнейшего числа машин; в) того, что на трассу выедут хотя бы 10 машин.

8. Вероятность изготовления качественного телевизора равна 0,998. Среди какого количества случайно отобранных телевизоров можно с вероятностью 0,95 ожидать отсутствие бракованных? Какова вероятность того, что в партии из 2000 телевизоров будет пять или семь бракованных?

9. Портье гостиницы имеет шесть различных ключей от шести номеров. Наудачу он пробует открыть дверь одним из них. СВ X – число попыток открыть дверь (проверенный ключ повторно не используется). Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<\dfrac{3\pi}{2}, \\ \cos x, & \dfrac{3\pi}{2}\le x\le 2\pi, \\ 1, & x>2\pi. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X],\ D[X],\ \sigma_X$;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right|\le\sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{4}, & x\in[-1;1], \\ A, & x\in(1;2], \\ 0, & x\notin[-1;2]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P(-3 < X < 0)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Диаметр заклепки является СВ X и подчинен нормальному закону распределения с параметрами $a = 4$ мм (эталонный диаметр), $\sigma = 0{,}02$ мм. Найти вероятность того, что диаметр заклепки будет отличаться от эталонного диаметра на величину, меньшую 0,05 мм. Написать выражение для плотности распределения и функции распределения СВ X.

13. Испытываются два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы каждого элемента имеет показательное распределение с параметрами 0,03 и 0,06 соответственно. Найти вероятность того, что за 8 часов: а) оба элемента откажут; б) откажет только один элемент.

14. Из колоды в 36 карт достают одну карту. СВ X – число вынутых королей; Y – число вынутых карт-картинок (туз считается картинкой). Составить закон распределения системы СВ (X, Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

X \ Y	– 3	– 2	– 1	0
– 2	0,04	0,1	C	0,06
1	0,1	0,2	0,1	0,1
4	0,03	0,08	0,07	0,09

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X = 1$ и СВ X при $Y = -3$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x,y)$ непрерывной системы СВ (X,Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} Axy^3, & \text{при } 1\le x\le 2,\ 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Средний вес яблока равен 120 г. Оценить вероятность того, что наудачу взятое яблоко весит не более 350 г (с помощью неравенства Маркова).

Вариант 14

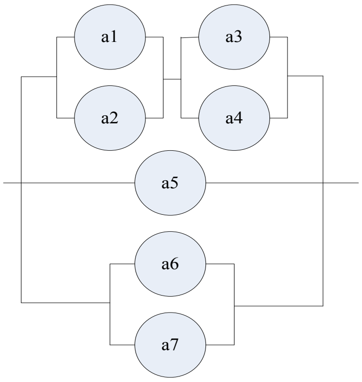
1. В коробке лежат 12 ручек и 15 колпачков к ним. Каким количеством способов можно выбрать из них четыре комплекта ручек с колпачками?

2. Поезд, состоящий из 12 вагонов и вагона-ресторана, формируется произвольным образом. Найти вероятность того, что вагон № 5 и вагон-ресторан будут расположены рядом.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{0\le x\le 1; 0\le y\le 1\}$, попадет в заданную область $d:\left\{1-\sqrt{1-x^2}\le y\le \sqrt{x}\right\}$.

4. В портфеле лежат 12 тетрадей. Ученику нужна тетрадь по биологии. Он достает тетради по одной. Найти вероятность того, что нужная тетрадь найдется не более чем с трех первых попыток.

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. В баскетболе в зоне около корзины выделяются три типа различных позиций расположения игроков. Игрок X оказывается в каждой из этих позиций с вероятностями 0,5; 0,3; 0,2. Вероятности попадания мячом в корзину с соответствующей позиции равны 0,4; 0,1; 0,3.

а) Найти вероятность того, что игрок X, находясь в зоне около корзины, сделает успешный бросок.

б) Игрок X сделал успешный бросок, находясь в зоне около корзины.

Найти вероятность того, что игрок находился в позиции первого типа.

7. В рыбном хозяйстве форель составляет 70 %. Найти вероятность того, что из 10 выловленных рыб: а) окажутся три форели; б) окажется наивероятнейшее число форелей; в) окажутся хотя бы две форели.

8. Баскетболист бросает по кольцу 300 раз. Вероятность промаха равна 0,03. Найти вероятность того, что: а) баскетболист промахнется не менее пяти раз; б) промахнется шесть раз.

9. Слесарь пробует открыть сейф, имея пять различных ключей. СВ X – число попыток. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 0,5(1-\cos x), & 0\le x\le \pi, \\ 1, & x>\pi. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right|\le \sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}, & x\in[-8;-6], \\ A(x+4), & x\in(-6;-4], \\ 0, & x\notin[-8;-4]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P(-5< X < 2)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Размер гайки «под ключ» является СВ X и подчинен нормальному закону распределения с параметрами $a=8$ мм, $\sigma=0{,}1$ мм. Какие размеры гайки можно ожидать с вероятностью 0,85? Написать выражения для плотности распределения и функции распределения СВ X.

13. Производится испытание трех деталей, работающих независимо друг от друга. Время безотказной работы деталей имеет показательное распределение с параметрами 0,15; 0,25; 0,35 соответственно. Найти вероятность того, что за 7 часов: а) откажут не менее двух элементов; б) откажет хотя бы один элемент.

14. В урне содержатся 12 красных и 8 зеленых шаров. Из нее извлекли два шара без возвращения. СВ X – число красных шаров в выборке; Y – число зеленых шаров в выборке. Составить закон распределения системы СВ (X, Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

X \ Y	– 4	– 2	0	2
1	0,07	0,2	0,1	0,2
2	C	0,06	0,02	0,07
3	0,05	0,09	0,03	0,08

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=3$ и СВ X при $Y=0$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x,y)$ непрерывной системы СВ (X,Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} A(2x-y), & \text{при } 0 \le x \le 1,\ -2 \le y \le 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Среднее число солнечных дней в году на Северном полюсе равно 30. Оценить вероятность того, что в течение года на Северном полюсе не более 120 солнечных дней.

Вариант 15

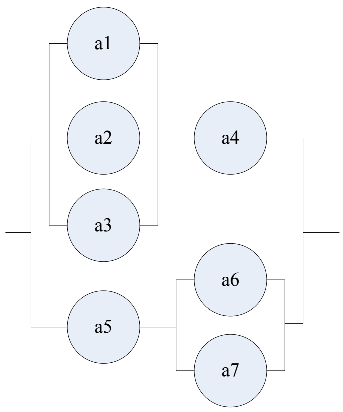
1. Каким количеством способов можно выбрать 12 человек из 17, если среди них есть двое, которые не хотят быть вместе?

2. Поезд, состоящий из 13 вагонов и вагона-ресторана, формируется произвольным образом. Найти вероятность того, что между вагоном № 3 и вагоном-рестораном будут находиться пять вагонов.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$, попадет в заданную область $d:\left\{x^3 \le y \le \sin\frac{\pi x}{2}\right\}$.

4. Два игрока A и B бросают монету по очереди. Начинает A. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб. Определить вероятность того, что выиграл игрок A, если всего будет сделано не более трех бросков.

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. Футбольная команда за нарушение и недисциплинированное поведение наказывается тремя видами ударов: штрафной удар, пенальти, свободный удар. Замечено, что команда «Арсенал» получает из 10 наказаний-ударов в среднем шесть штрафных ударов, один пенальти и три свободных удара. Вероятность забить мяч противником в этом случае составит 0,3; 0,5; 0,2 соответственно.

а) Найти вероятность того, что команде забили мяч в результате наказания.

б) Команде забили мяч в результате наказания. Найти вероятность того, что команду наказали пенальти.

7. Телефоны, выдерживающие гарантийный срок, составляют 95 %. Найти вероятность того, что из 12 телефонов гарантийный срок выдержат: а) семь телефонов; б) наивероятнейшее число телефонов; в) хотя бы три телефона.

8. Вероятность того, что микроскоп потребует доводки, равна 0,005. Найти вероятность того, что из 850 микроскопов доводки потребуют: а) два или три; б) ровно семь.

9. Два хоккеиста из команд А и В поочередно бьют буллиты до первого попадания одним из них, но не более трех бросков каждый. Вероятность взятия ворот хоккеистом из команды А равна 0,4; из команды В – 0,6. Начинает хоккеист из команды А. СВ X – число бросков хоккеиста из команды А. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины *X*.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<\dfrac{\pi}{2}, \\ -\cos x, & \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi, \\ 1, & x>\pi. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right|\le \sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины *X*.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+5}{20}, & x\in[-5;-1], \\ A, & x\in(-1;2], \\ 0, & x\notin[-5;2]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P(-3<X<1)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Выпускаются образцы легированной стали. Оказывается, что твердость образцов стали является СВ *X* и подчинена нормальному закону распределения с параметрами $a=65$HRC (эталонная твердость), $\sigma=4$HRC. Найти вероятность того, что твердость образца стали не превзойдет 5HRC от эталонного значения. Написать выражения для плотности распределения и функции распределения СВ *X*.

13. Длительности безотказной работы трех приборов подчинены показательному закону с параметрами 0,03; 0,04 и 0,06. Найти вероятность того, что за 8 часов: а) откажут только два прибора; б) откажет только один прибор.

14. В урне содержатся шесть красных, четыре синих и пять зеленых шаров. Из нее извлекли два шара без возвращения. СВ X – количество красных шаров в выборке; Y – количество синих шаров в выборке. Составить закон распределения системы СВ (X,Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X,Y):

X \ Y	– 1	0	1	2
– 4	0,1	0,1	0,08	0,01
– 2	0,2	0,03	0,1	0,2
0	0,02	C	0,07	0,04

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=-2$ и СВ X при $Y=1$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x,y)$ непрерывной системы СВ (X,Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} A(x+3y), & \text{при } 1\le x\le 3,\ 0\le y\le 2, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Среднесуточная продажа продуктов магазина составляет 20000 кг, а среднеквадратичное отклонение – 200 кг. Сколько килограммов продуктов продаст в ближайшие сутки магазин с вероятностью, не меньшей 0,96? (Оценить с помощью неравенства Чебышева.)

Вариант 16

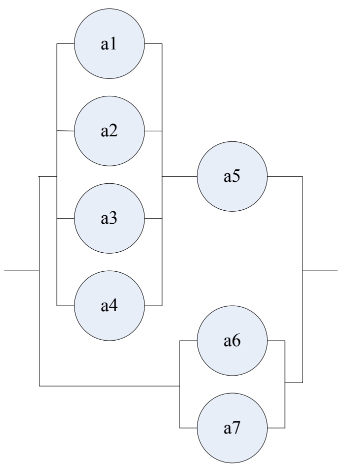
1. Билеты в театр имеют 10 ценовых категорий. Каким количеством способов шесть зрителей могут приобрести билеты так, чтобы все билеты были из разных ценовых категорий?

2. Пять кавалеров и десять дам рассаживаются по трое за пятью столиками. Какова вероятность того, что за каждым столиком окажется кавалер.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{\,0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\,\}$, попадет в заданную область $d:\left\{y \le \min\left(9x^2; \sqrt{1,5(1-x)}\right)\right\}$.

4. В урне четыре зеленых и пять сиреневых шаров. Игроки A и B по очереди извлекают шары. Начинает A. Выигрывает тот, кто первым вынет зеленый шар. Найти вероятность выигрыша первого игрока.

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. На хоккейной площадке пять полевых игроков. Вероятность того, что они нарушат правила и получат удаление, равна 0,3; 0,2; 0,2; 0,1; 0,1 соответственно. Оказывается, что во время удаления одного из этих игроков команде забивают гол с вероятностью 0,10; 0,20; 0,12; 0,08; 025 соответственно. Один из хоккеистов наказан удалением.

а) Найти вероятность того, что за время отсутствия игрока команде забьют гол.

б) За время штрафного отсутствия игрока команде забили гол. Найти вероятность того, что штраф получил игрок под номером 5.

7. Вероятность прихода поезда по расписанию равна 0,95. Найти вероятность того, что из пяти поездов вовремя прибудут: а) четыре поезда; б) наивероятнейшее число поездов; в) хотя бы три поезда.

8. Вероятность изготовления стандартного изделия равна 0,95. Найти вероятность того, что: а) среди взятых наудачу 500 изделий 98 % окажутся доброкачественными; б) бракованными окажутся более трех изделий среди взятых 1000 изделий.

9. Два хоккеиста из команд A и B поочередно бьют буллиты до первого попадания одним из них, но не более трех бросков каждый. Вероятность взятия ворот хоккеистом из команды A равна 0,4; из команды B – 0,6. Начинает хоккеист из команды А. СВ X – число бросков хоккеиста из команды В. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 0,5(1-\cos 2x), & 0<x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X],\ D[X],\ \sigma_X$;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right|\le \sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{6}, & x\in[-4;1], \\ A(x-3), & x\in(1;3], \\ 0, & x\notin[-4;3]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X],\ D[X],\ \sigma_X$;

г) $P(-3< X <2)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Выпускаются образцы легированного чугуна. Оказывается, что прочность образцов чугуна является СВ X и подчинена нормальному закону распределения с параметрами $a=30$ кГ/мм^2, $\sigma=2$ кГ/мм^2. Какую точность прочности образца чугуна можно ожидать с вероятностью 0,97? Написать выражения для плотности распределения и функции распределения СВ X.

13. Время исполнения заказа на ремонт имеет показательный закон распределения со средним временем исполнения в 10 суток. Какова вероятность того, что сданный прибор починят: а) не ранее чем через четверо суток; б) менее чем через четверо суток?

14. Лена и Саша извлекают по одному шару из урны, содержащей 10 синих и 8 красных шаров без возвращения. Лена извлекает шар первой. СВ X – число красных шаров у Лены; Y – число красных шаров у Саши. Составить закон распределения системы СВ (X,Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X,Y):

X \ Y	– 3	– 1	1	3
0	0,08	0,2	C	0,09
1	0,07	0,06	0,1	0,06
2	0,05	0,02	0,03	0,04

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=0$ и СВ X при $Y=3$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x,y)$ непрерывной системы СВ (X,Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} Axy, & \text{при } x+y\le 3,\ x\ge 1,\ y\ge 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x), f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X],\ M[Y],\ \sigma_X, \sigma_Y$;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Изделие является стандартным с вероятностью 0,95. Сколько нужно проверить изделий, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,97, можно было утверждать, что абсолютная величина отклонения доли стандартных изделий от 0,95 не превысит 0,02?

Вариант 17

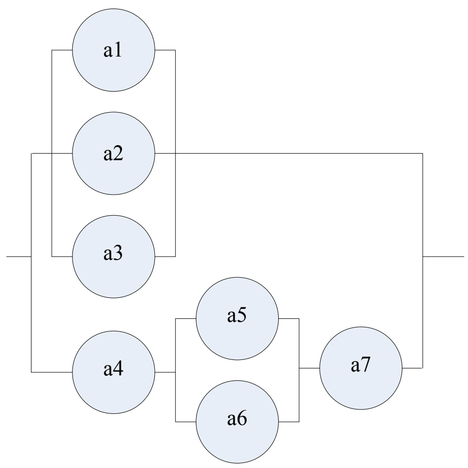
1. В зале 60 посадочных мест: 10 рядов по 6 мест в каждом. На концерт пришли 60 человек. Каким количеством способов двое могут занять места в зале так, чтобы быть в одном ряду?

2. Поезд метро состоит из восьми вагонов. Найти вероятность того, что пять пассажиров сядут в один вагон.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$, попадет в заданную область $d:\left\{\frac{2}{\pi}\arcsin x \le y \le \sqrt[3]{x}\right\}$.

4. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при двух выстрелах равна 0,64. Найти вероятность двух попаданий при двух выстрелах.

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. В группе 25 студентов. На каждом занятии по математике преподаватель проводит тестирование студентов, предлагая одну задачу по пройденному материалу. Как правило, 5 студентов верно решают задачу в 95 % случаев, 10 студентов – в 80 % случаев, 8 студентов – в 60 % случаев, 2 студента – в 30 % случаев. Преподаватель проверил работу одного студента.

а) Найти вероятность того, что задача решена верно.

б) Оказалось, что в проверенной работе задача решена верно. Найти вероятность того, что работа выполнена студентом, верно решающим задачи в 30 % случаев.

7. Вероятность своевременного прихода автобуса к остановке равна 0,7. Найти вероятность того, что из семи автобусов к остановке вовремя подъедут: а) четыре автобуса; б) наивероятнейшее число автобусов; в) хотя бы шесть автобусов.

8. Вероятность выдачи визы в консульстве государства A равна 0,8. Найти вероятность того, что из 400 обратившихся визу получат: а) ровно 300 обратившихся; б) от 320 до 380 обратившихся.

9. Автомобиль должен проехать по улице с четырьмя светофорами, каждый из которых пропускает его с вероятностью 0,25. СВ X – число остановок автомобиля на этой улице. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le \dfrac{\pi}{6}, \\ -\cos 3x, & \dfrac{\pi}{6} < x \le \dfrac{\pi}{3}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right| \le \sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} A(x+6), & x\in[-6;-1], \\ \dfrac{2}{9}, & x\in(-1;1], \\ 0, & x\notin[-6;1]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P(-4< X <0)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Выпускаются образцы сплава алюминия. Оказывается, что плотность образцов сплава алюминия является СВ X и подчинена нормальному закону распределения с параметрами $a=2{,}7$ г/см^3, $\sigma=0{,}1$ г/см^3. Найти вероятность того, что плотность образцов сплава алюминия будет в пределах от $2{,}68$ до $2{,}74$ г/см^3. Написать выражения для плотности распределения и функции распределения СВ X.

13. Длительность безотказной работы двух независимо работающих приборов имеет показательное распределение с параметрами 0,01 и 0,04 соответственно. Найти вероятность того, что за 7 часов: а) оба элемента откажут; б) откажет только один элемент.

14. Лена и Саша извлекают по одному шару из урны, содержащей 10 синих и 8 красных шаров с возвращением. СВ X – число красных шаров у Лены; Y – число красных шаров у Саши. Составить закон распределения системы СВ (X,Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X,Y):

X \ Y	– 1	1	3	5
– 3	0,1	0,2	0,06	0,2
– 2	0,02	0,04	0,03	0,05
– 1	0,06	С	0,09	0,07

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=-2$ и СВ X при $Y=3$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x,y)$ непрерывной системы СВ (X, Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} A(3x+y), & \text{при} \quad x+2y \le 2,\ x \ge 1,\ y \ge 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. С помощью неравенства Чебышева требуется определить средний рост юношей-выпускников школ выборочным путем. Рост какого количества юношей, выбранных случайным образом, нужно измерить, чтобы с вероятностью, превышающей 0,98, можно было утверждать, что средний рост юношей у отобранной группы будет отличаться от среднего роста всех выпускников школ не более чем на 1,5 см? Известно, что дисперсия роста юноши из отобранной группы не превышает 36 см^2.

Вариант 18

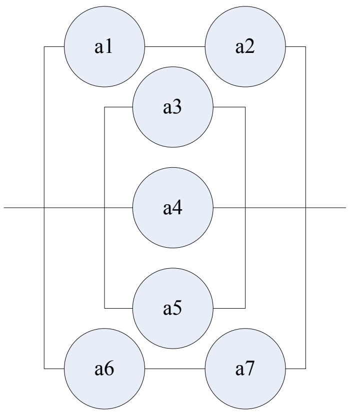
1. Поезд должен состоять из трех багажных, пяти плацкартных и двух купейных вагонов. Каким количеством способов можно сформировать состав, если купейные вагоны должны стоять в начале состава, а багажные – в конце?

2. Из телефонной книги, в которой все номера семизначные, наугад выбирается номер телефона. Найти вероятность того, что последние четыре цифры номера одинаковые.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{\, 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1 \,\}$, попадет в заданную область $d:\left\{ \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} x \le y \le x^2 \right\}$.

4. При попадании камнем в ствол дерева с него взлетает стая птиц с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что стая взлетела, если вероятность попадания камнем в ствол дерева равна 0,96.

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. Студент добирается до университета городским транспортом. В пяти случаях из десяти он выбирает маршрутное такси, в двух – автобус, в трех – троллейбус. Если выбрано маршрутное такси, то из-за пробок на дорогах он опаздывает на лекцию по математике в 5 % случаев, автобус – в 7 % случаев, троллейбус – в 15 % случаев.

а) Найти вероятность того, что студент, выйдя вовремя, опоздает на лекцию.

б) Оказалось, что студент все-таки опоздал. Найти вероятность того, что он добирался на маршрутном такси.

7. Вероятность выигрыша в телевизионной игре равна 0,1. Найти вероятность того, что из восьми купленных купонов невыигрышными окажутся: а) шесть купонов; б) наивероятнейшее число купонов. Найти вероятность того, что из восьми купленных купонов хотя бы один будет выигрышным.

8. Вероятность того, что купят пару обуви в магазине, равна 0,8. Найти вероятность того, что из 900 пар обуви продадут: а) ровно 725 пар; б) от 700 до 730 пар обуви.

9. Автомобиль должен проехать по улице с четырьмя светофорами, каждый из которых пропустит его с вероятностью 0,4. СВ X – число светофоров, пройденных машиной до первой остановки или до прибытия к месту назначения. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 1-\cos 2x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right| \le \sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} A, & x\in[3;5], \\ \dfrac{2(8-x)}{21}, & x\in(5;8], \\ 0, & x\notin[3;8]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P(6<X<9)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Рассматриваются конденсаторы определенной емкости. Оказывается, что емкость конденсатора является СВ X и подчинена нормальному закону распределения с параметрами $a = 18$ мкФ, $\sigma = 0,5$ мкФ. Какую точность емкости можно гарантировать с вероятностью 0,9? Написать выражения для плотности распределения и функции распределения СВ X.

13. Длительность безотказной работы двух независимо работающих приборов имеет показательное распределение с параметрами 0,03 и 0,05 соответственно. Найти вероятность того, что за три часа: а) оба элемента не откажут; б) откажет только один элемент.

14. В урне содержатся четыре коричневых, шесть оранжевых и восемь сиреневых шаров. Из нее извлекли два шара без возвращения. СВ X – число коричневых шаров; Y – число оранжевых шаров. Составить закон распределения системы СВ (X, Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

X \ Y	– 2	– 1	0	1
0	0,08	0,06	0,02	0,1
2	0,2	0,05	0,2	C
4	0,07	0,04	0,05	0,03

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X = 4$ и СВ X при $Y = -2$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x,y)$ непрерывной системы СВ (X,Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} A(x-2y), & \text{при} \quad x+y>0,\ x<2,\ y<0, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. При изготовлении наушников вероятность брака равна 0,03. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что в партии из 6000 наушников отклонение относительной частоты бракованных изделий от вероятности брака превысит 0,015.

Вариант 19

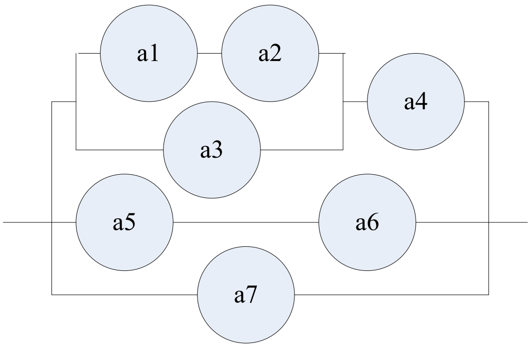
1. Вернувшись из академического отпуска, десять студентов случайным образом распределяются по пяти группам. Каким количеством способов их можно распределить по группам так, чтобы только в две группы попали по пять студентов?

2. В аквариуме 10 рыбок: 4 сома и 6 золотых рыбок. Наудачу вылавливают трех. Найти вероятность того, что среди выловленных рыбок ровно два сома.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{\, 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1 \,\}$, попадет в заданную область $d:\left\{ y \le \min\left(e^2 x^2; |\ln x| \right) \right\}$.

4. На розыгрыше благотворительной лотереи 2/3 билетов имеют выигрыши. Сколько билетов нужно купить, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,95, можно было ожидать, что выигрыш будет хотя бы по одному билету.

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. В университетской столовой Вася берет на обед в 60 % случаев пирожок, в 30 % – кашу, в 10 % – суп. Вероятность того, что он проголодается к концу занятий, равна 0,5; 0,3; 0,7 соответственно.

а) Найти вероятность того, что Вася, пообедав в столовой, проголодался к концу занятий.

б) Оказалось, что Вася проголодался. Найти вероятность того, что на обед он ел кашу.

7. Вероятность брака при выпуске компьютерной мыши равна 0,1. Найти вероятность, что из 12 мышей контроль качества обнаружит брак: а) у пяти мышей; б) у наивероятнейшего числа мышей; в) хотя бы у четырех мышей.

8. Вероятность поражения мишени равна 0,85. Производится 5625 выстрелов. Найти: а) число попаданий, которое следует ожидать с вероятностью 0,004; б) вероятность того, что попаданий будет от 4750 до 4790.

9. По воротам бьют мячом до первого промаха, при этом число попыток не более пяти. Вероятность попадания – 0,7. СВ X – число попыток. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-\pi, \\ 0{,}5(1+\cos x), & -\pi \le x \le 0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right|\le\sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} A\left(x-2\right), & x\in\left[2;5\right], \\ \dfrac{2}{5}, & x\in\left(5;6\right], \\ 0, & x\notin\left[2;6\right]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P\left(0< X<3\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Величина сопротивления для большой партии однотипных резисторов является СВ X и подчинена нормальному закону распределения с параметрами $a=10$ кОм, $\sigma=0{,}3$ кОм. Найти вероятность того, что сопротивление случайно выбранного резистора отличается на 0,5 кОм от математического ожидания. Написать выражение для плотности распределения и функции распределения СВ X.

13. Время простоя прибора в ожидании ремонта распределено по показательному закону с математическим ожиданием, равным 2,5 ч. Найти вероятность простоя отказавшего прибора: а) не менее четырех часов; б) менее пяти, но более двух часов.

14. В выпускаемых цехом изделиях брак по причине дефекта α составляет 4 %, а по причине дефекта β – 5,5 %. СВ Х – индикатор брака по причине дефекта α при испытании одной детали; Y – индикатор брака по причине дефекта β при испытании одной детали. Составить закон распределения системы СВ $\left(X,Y\right)$. Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

$X \backslash Y$	-4	-1	2	5
-2	C	0,02	0,09	0,06
-1	0,2	0,1	0,1	0,01
0	0,05	0,03	0,2	0,04

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X = -2$ и СВ X при $Y = 5$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x, y)$ непрерывной системы СВ (X, Y):

$$f(x,y) = \begin{cases} Axy^2, & \text{при } \ 2x + y \le 2, \ x \ge 0, \ y \ge 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Вероятность изготовления бракованного утюга равна 0,06. Какое наименьшее число утюгов следует отобрать, чтобы с вероятностью не менее 0,9 можно было утверждать, что доля бракованных утюгов будет отличаться от вероятности изготовления бракованного утюга не более чем на 0,03? (Оценить с помощью неравенства Чебышева.)

Вариант 20

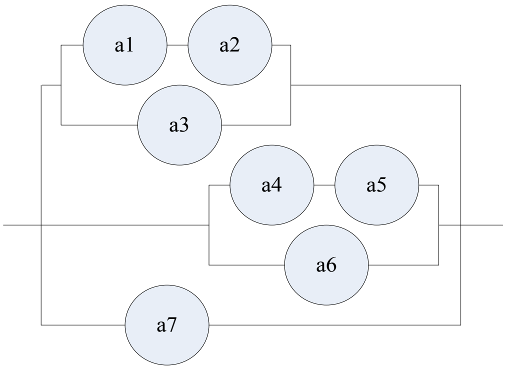
1. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в первых четырех цифрах которых не встречаются цифры 0 и 5?

2. Из 15 тетрадей 10 в клеточку. Найти вероятность того, что из выбранных наугад четырех тетрадей две в клеточку.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$, попадет в заданную область $d:\left\{y \le \min\left(16x^2; \left|\log_4 x\right|\right)\right\}$.

4. Житель страны А посетит страну В, если ему откроют визу, на основании чего он купит билет в страну В. Житель страны А посещает страну В с вероятностью 0,8. Билет он покупает с вероятностью 0,95. Какова вероятность того, что он получит визу?

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. Студент-первокурсник, придя домой после занятий в университете, готовится к занятиям по одному предмету. Чаще всего он занимается программированием – в 40 % случаев он пишет программы, в 30 % – решает задачи по математике, в 20 % – решает задачи по физике, в 10 % – переводит тексты с иностранного языка. Увлекаясь предметом, он может забыть о свидании с девушкой в 50, 60, 10 и 10 % случаев соответственно.

а) Найти вероятность того, что студент забыл о свидании.

б) Оказалось, что студент забыл о свидании. Найти вероятность того, что он занимался математикой.

7. Вероятность проигрыша в каждой игре для команды «Зенит» составляет 0,7. Найти вероятность того, что из девяти матчей команда проиграет: а) три матча; б) наивероятнейшее число матчей; в) выиграет хотя бы в трех матчах.

8. Игральную кость бросили 2500 раз. Найти: а) вероятность того, что четыре очка выпадет более 400, но менее 510 раз; б) число появления двух очков, если вероятность такого события равна 0,003.

9. Мяч бросают в корзину до первого попадания, но не более четырех раз. Вероятность попадания при одном броске равна 0,9. СВ X – число бросков. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -\dfrac{\pi}{4}, \\ \cos 2x, & -\dfrac{\pi}{4} < x \le 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P\left(\left|X - M[X]\right| \le \sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{3}, & x \in [-5; -4], \\ A(x+3), & x \in (-4; -3], \\ 0, & x \notin [-5; -3]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P(-2{,}5 < X < 4)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Рассматривается время обратного восстановления у большой партии однотипных диодов. Оказывается, что время восстановления является СВ X и подчинено нормальному закону распределения с параметрами $a=4$ мкс, $\sigma=0,03$ мкс. Найти вероятность того, что время обратного восстановления у случайно выбранного диода будет от 3,5 до 4,1 мкс. Написать выражения для плотности распределения и функции распределения СВ X.

13. Время безотказной работы прибора подчинено показательному закону с математическим ожиданием, равным 50 часам. Найти вероятность того, что: а) прибор проработает безотказно не менее 100 часов; б) не более 10 часов.

14. Два раза бросают игральную кость. СВ X – число появления цифры 4; Y – число появления четной цифры. Составить закон распределения системы СВ (X,Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X,Y):

X \ Y	– 3	0	3	6
1	0,04	0,08	0,07	0,2
2	0,03	0,06	0,09	0,1
3	0,2	0,1	C	0,02

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=2$ и СВ X при $Y=0$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x,y)$ непрерывной системы СВ (X,Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} Ax^3y, & \text{при} \quad x+y\le 3,\ x\ge 0,\ y\ge 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x),\ f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X],\ M[Y],\ \sigma_X, \sigma_Y$;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Вероятность того, что документы из архива будут востребованы, равна 0,1. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что из 500 документов будут востребованы от 40 до 60 документов.

Вариант 21

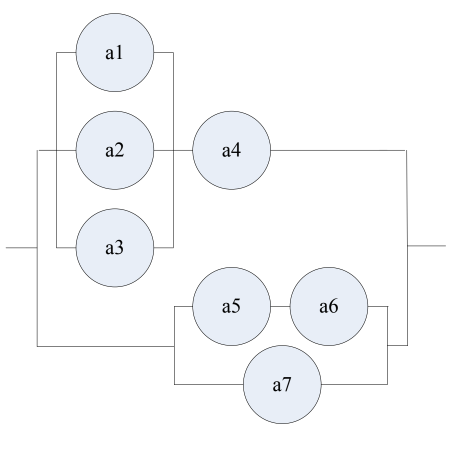
1. В комнате шесть стульев и одно кресло. Каким количеством способов могут расположиться на них семь человек, если кресло может занять только кто-то из четверых старших?

2. Из 50 вопросов студент выучил 40. Найти вероятность того, что он ответит на два вопроса, выбранных наудачу.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1\}$, попадет в заданную область $d:\left\{\frac{2}{\pi}\arcsin x \le y \le \sin\frac{\pi x}{2}\right\}$.

4. Вероятность попадания в движущуюся цель при одном выстреле постоянна и равна 0,05. Сколько выстрелов необходимо сделать для того, чтобы с вероятностью не менее 0,85 иметь хотя бы одно попадание?

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. Катя пользуется тремя сайтами прогноза погоды, которые она посещает с определенной частотой: «Яндекс» с частотой 0,6; «Рамблер» – 0,3; «Гисметео» – 0,1. Установлено, что точность прогноза погоды на указанных сайтах равна 40, 35 и 32 % соответственно. Катя зашла на один из сайтов, чтобы узнать погоду на предстоящий день.

а) Найти вероятность того, что получен неверный прогноз погоды.

б) Получен неверный прогноз погоды. Найти вероятность того, что Катя пользовалась сайтом «Яндекс».

7. Вероятность поражения цели каждым из десяти выстрелов равна 0,9. Найти вероятность поражения цели: а) семью выстрелами; б) наивероятнейшим числом выстрелов; в) хотя бы восьмью выстрелами.

8. Интернет-магазин торгует электронной техникой. Вероятность отказа в покупке составляет 0,1. За час поступило 1500 заказов. Найти: а) количество заказов, которые будут выполнены с вероятностью 0,002; б) вероятность того, что отказов будет не менее 155, но менее 175.

9. Рабочий собирает прибор из пяти комплектующих деталей. Каждая деталь нестандартна с вероятностью 0,2. Перед сборкой каждую деталь проверяют и негодную заменяют годной. СВ X – число деталей в приборе, которые пришлось заменить при сборке. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -1, \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x, & -1 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right| \le \sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2(x-3)}{11}, & x\in[3;4], \\ A, & x\in(4;9], \\ 0, & x\notin[3;9]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P(7<X<10)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Ошибка измерений прибора является СВ X и имеет нормальный закон распределения. Прибор имеет систематическую ошибку $a=-1$ и среднеквадратическую ошибку $\sigma=12$ условных единиц. Найти вероятность того, что ошибка измерения попадет в интервал (– 6; 10). Написать выражение для плотности распределения и функции распределения СВ X.

13. Продолжительность телефонного разговора – СВ, распределенная по показательному закону. Среднее время телефонного разговора равно четырем минутам. Какова вероятность того, что: а) телефонный разговор будет длиться не менее пяти минут; б) менее трех минут?

14. Два раза бросают игральную кость. СВ X – число появления цифры 3; Y – число появления нечетной цифры. Составить закон распределения системы СВ (X, Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

X \ Y	– 2	0	2	4
– 3	0,07	0,2	0,1	0,2
– 1	0,09	0,03	0,05	0,05
1	C	0,06	0,02	0,08

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X = -3$ и СВ X при $Y = 4$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x, y)$ непрерывной системы СВ (X, Y):

$$f(x, y) = \begin{cases} A(x + y), & \text{при } \; 3x + 2y \le 6, \; x \ge 1, \; y \ge 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Вероятность того, что студенты факультета сдадут все экзамены в срок, равна 0,6. С помощью неравенства Чебышева оцените вероятность того, что из 500 студентов число сдавших все экзамены в срок заключено в границах от 220 до 380 студентов.

Вариант 22

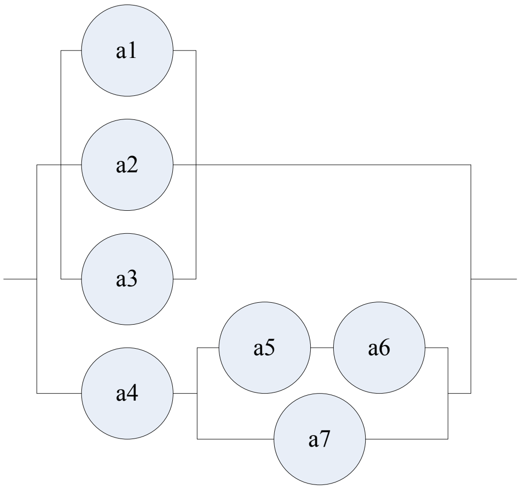
1. Каким количеством способов можно поровну распределить 10 студентов, вернувшихся из академического отпуска, по пяти группам?

2. Имеется шесть сиреневых и восемь желтых мотков ниток. Наудачу берут два мотка. Найти вероятность того, что они разных цветов.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D: \{ 0 \le x \le 1; \; 0 \le y \le 1 \}$, попадет в заданную область $d: \left\{ \cos\frac{\pi x}{2} \le y \le 2 + \frac{2}{0{,}1x - 2} \right\}$.

4. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона, поэтому набирает ее наудачу. Найти вероятность того, что звонить ему придется не более четырех раз.

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. Петя посещает кинотеатр «Синематограф» в четыре раза чаще, чем кинотеатр «Люмьер», а кинотеатр «Иллюзион» в два раза чаще, чем кинотеатр «Люмьер». Он заметил, что начало интересующего его сеанса в кинотеатре приходится ждать более двух часов (так как на текущий сеанс билеты уже проданы) с вероятностью 0,3; 0,4; 0,6 соответственно. Петя решил сходить в кино.

а) Найти вероятность того, что Петя будет ждать начало сеанса более двух часов.

б) Оказалось, что Петя ждал начала сеанса более двух часов. Найти вероятность того, что он смотрел кино в «Синематографе».

7. Вероятность сдачи студентом каждого из семи зачетов равна 0,3. Найти вероятность сдачи: а) пяти зачетов; б) наивероятнейшего числа зачетов; в) хотя бы одного зачета.

8. Вероятность того, что каждый из 2300 жителей района смотрит сериал, равна 0,7. Найти: а) то количество жителей района, которые смотрят сериал с вероятностью 0,006; б) вероятность того, что сериал смотрят от 1600 до 1630 человек.

9. Вероятность сдачи первого экзамена 0,9, второго – 0,8, третьего – 0,95. СВ X – число сданных экзаменов. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-3, \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{3}, & -3\le x\le 3, \\ 1, & x>3. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right|\le\sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} A, & x\in[1;2], \\ \dfrac{4-x}{4}, & x\in(2;4], \\ 0, & x\notin[1;4]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P(3<X<8)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Автомат заполняет пачки чаем по 100 г. Известно, что масса чая в пачке является СВ X и подчинена нормальному закону. Найти среднее квадратичное отклонение массы чая в пачке, если в 4 % пачек чая больше, чем 105 г. Написать выражение для плотности распределения и функции распределения СВ X.

13. Коммутатор учреждения обслуживает 200 абонентов. Вероятность того, что абонент позвонит на коммутатор, равна 0,03. Какое из двух событий более вероятно: А – в течение одной минуты позвонят шесть абонентов; В – в течение одной минуты позвонят пять абонентов?

14. Симметричную монету подбрасывают три раза. СВ X – число выпавших гербов; Y – число гербов, выпавших во втором и третьем испытаниях. Составить закон распределения системы СВ (X, Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

$X \backslash Y$	1	2	3	4
– 4	0,02	0,08	0,05	0,03
0	0,1	C	0,04	0,02
4	0,06	0,2	0,1	0,1

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=4$ и СВ X при $Y=1$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x, y)$ непрерывной системы СВ (X, Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} Ax^2 y, & \text{при } \; x+y \le 3, \; x \ge 0, \; y \ge 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Известно, что 98 % изделий работают не меньше гарантийного срока. Наугад выбирают 20000 изделий. Оценить вероятность того, что до окончания срока гарантии выйдут из строя от 380 до 420 изделий (с помощью неравенства Чебышева).

Вариант 23

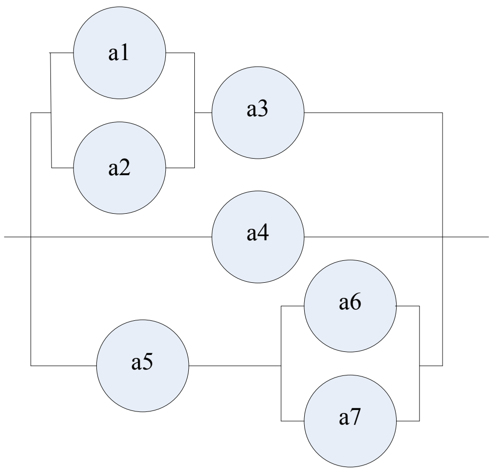
1. Каким количеством способов можно переставить буквы в слове «караван» так, чтобы гласные и согласные буквы чередовались?

2. В профкоме есть 40 путевок, из них 15 по системе «все включено». Найти вероятность того, что из 10 взятых наугад путевок четыре окажутся по системе «все включено».

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{\,0 \le x \le 1;\; 0 \le y \le 1\,\}$, попадет в заданную область $d:\left\{\dfrac{1}{2x} \le y \le \sqrt{2-2x}\right\}$.

4. Вероятность того, что студент вовремя приедет на занятия, равна 0,7. Найти вероятность того, что автобус подходит по расписанию, если студент выходит из дома без опоздания в 80 % случаев.

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. Компания друзей Вани выбирает боулинг-центр. Чаще всего они бывают в «Европарке» (40 % всех посещений), «Атриуме» (35 %), «Континенте» (25 %). Ваня может встретить Настю в этих центрах с вероятностью 0,2; 0,4; 0,1 соответственно. Ваня с друзьями пришел в боулинг-центр.

а) Найти вероятность того, что Ваня встретит Настю в боулинге-центре.

б) Оказалось, что Ваня встретил Настю в боулинге-центре. Найти вероятность того, что он с друзьями пришел в «Европарк».

7. В магазине продается девять разных планшетов. Вероятность того, что в данный момент планшет включен в рекламных целях, равна 0,75. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) три планшета; б) наивероятнейшее число планшетов; в) хотя бы восемь планшетов.

8. Проверяется качество 950 изделий. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,95. Найти: а) интервал, в который будет заключено число стандартных изделий среди проверенных, с вероятностью 0,9; б) вероятность того, что среди проверенных будет ровно 910 стандартных изделий.

9. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 0,1. Куплено три билета. СВ X – число выигрышных билетов. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2, \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}, & -2<x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right|\le\sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} A(x+3), & x\in[-3;1], \\ \dfrac{1}{3}, & x\in(1;2], \\ 0, & x\notin[-3;2]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P(-5<X<-1)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Добавление специальных веществ в воду уменьшает ее жесткость. Показатель жесткости воды является СВ X и имеет нормальное распределение с параметрами a = 3,8 °Ж, σ = 0,3 °Ж. Найти вероятность того, что взятый образец воды имеет жесткость от 3,0 до 4,0 °Ж. Написать выражения для плотности распределения и функции распределения СВ X.

13. Число грузовых составов, прибывающих на сортировочную станцию, имеет распределение Пуассона с математическим ожиданием четыре состава в час. Найти вероятность того, что в течение 40 мин прибудет: а) один состав; б) хотя бы один состав.

14. Симметричную монету подбрасывают три раза. СВ X – число выпавших гербов; Y – число подбрасываний до первого герба (если герб не выпал, то $Y=3$). Составить закон распределения системы СВ (X, Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

X \ Y	– 4	– 2	0	2
– 2	0,2	0,1	0,1	C
1	0,1	0,05	0,09	0,06
4	0,05	0,03	0,05	0,07

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=1$ и СВ X при $Y=-4$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x, y)$ непрерывной системы СВ (X, Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} Axy^3, & \text{при } \; x+y<0,\; x>-2,\; y>0, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x),\ f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X],\ M[Y],\ \sigma_X, \sigma_Y$;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Вероятность попадания в мишень одним выстрелом равна 0,6. Сколько нужно произвести выстрелов, чтобы с вероятностью 0,97 отклонение относительной частоты попадания в мишень от вероятности не превысило $0{,}05$? Оценить с помощью неравенства Чебышева.

Вариант 24

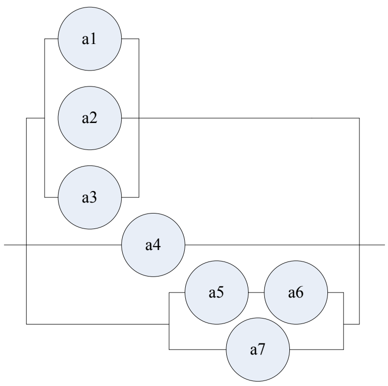
1. Из 10 бадминтонистов и 6 бадминтонисток составляют четыре смешанные пары. Каким количеством способов это можно сделать?

2. Из колоды в 52 карты вынимают 10 карт. Найти вероятность того, что среди них один туз.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1\}$, попадет в заданную область $d:\left\{y \le \min\left(2^{x+0,5} - 1;\ \dfrac{1}{4x^2}\right)\right\}$.

4. Вероятность того, что студент найдет время пойти на концерт, равна 0,6. Какова вероятность того, что студент будет слушать концерт, если в 5 % случаев исполнители не приезжают?

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. В стоматологической клинике работают терапевты: Зубов – на ставку, Пломбов – на 0,5 ставки, Клыков – на 1,5 ставки. В практике врачей встречаются диагностические ошибки. Так, Зубов допускает диагностические ошибки в 3 % случаев, Пломбов – в 4 %, Клыков – в 2 %.

Пациент обратился за помощью в клинику.

а) Найти вероятность того, что пациенту был поставлен неверный диагноз.

б) Пациенту был поставлен неверный диагноз. Найти вероятность того, что он лечился у Клыкова.

7. Вероятность сдачи экзамена для каждого из восьми студентов равна 0,2. Найти вероятность того, что экзамен сдадут: а) два студента; б) наивероятнейшее число студентов; в) хотя бы один студент.

8. Вероятность того, что при включении приемника будут передавать «Новости», равна 0,3. Приемник включали 600 раз. Найти вероятность того, что «Новости» звучали менее 300, но более 150 раз. Сколько раз прозвучали «Новости» с вероятностью 0,008?

9. Вероятность безотказной работы монитора Samsung в течение гарантийного срока равна 0,95, монитора Acer – 0,93, монитора LG – 0,8. СВ X – число мониторов, проработавших гарантийный срок, среди трех мониторов разных производителей. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -4, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi} \arcsin \dfrac{x}{4}, & -4 \le x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P\left(\left|X - M[X]\right| \le \sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{5}, & x\in\left[-7;-5\right], \\ A(x-1), & x\in\left(-5;1\right], \\ 0, & x\notin\left[-7;1\right]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P(-1< X<3)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. На обувной фабрике доля брака обуви является СВ X и имеет нормальное распределение с параметрами a = 4 %, σ = 0,5 %. Найти вероятность того, что в случайно отобранной партии брак может составить от 5 до 6 %. Написать выражения для плотности распределения и функции распределения СВ X.

13. Вероятность того, что страница рукописи содержит хотя бы одну опечатку, равна 0,98. Число опечаток на странице рукописи является СВ и подчинено закону Пуассона. Найти: а) среднее число опечаток на странице рукописи; б) вероятность того, что на странице рукописи содержится три опечатки.

14. В двух урнах содержатся шары, по семь шаров в каждой. В первой урне один шар с № 1, три шара с № 2 и три шара с № 3; во второй урне три шара с № 1, три шара с № 2 и один шар с № 3. Из каждой урны извлекли по шару. Рассматриваются СВ X – номер шара, извлеченного из первой урны; Y – номер шара, извлеченного из второй урны. Составить закон распределения системы СВ (X,Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X,Y):

X \ Y	– 3	– 1	1	3
– 2	0,05	0,07	0,02	0,04
– 1	0,08	0,1	C	0,05
0	0,1	0,2	0,05	0,2

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=0$ и СВ X при $Y=-1$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x,y)$ непрерывной системы СВ (X, Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} A(2x+y), & \text{при } \ 2x+3y\le 6,\ x\ge 1,\ y\ge 0; \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,9. Сколько нужно проверить деталей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, можно было утверждать, что абсолютная величина отклонения относительной частоты стандартных деталей от вероятности детали быть стандартной не превысит 0,1 (оценить с помощью неравенства Чебышева)?

Вариант 25

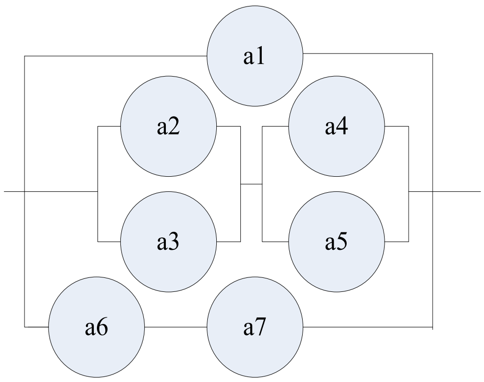
1. Каким количеством способов можно распределить по пяти группам 10 вернувшихся из академического отпуска студентов так, чтобы в одну группу попали шесть студентов, а в остальные группы – по одному?

2. Студент подготовил 45 вопросов из 60. Экзаменационный билет состоит из двух вопросов. Найти вероятность того, что взятый студентом билет состоит из подготовленных вопросов.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1\}$, попадет в заданную область $d:\left\{1-x \le y \le \dfrac{2}{\pi}\arccos x\right\}$.

4. На экзамене студентам дают билет при наличии зачетной книжки. Вероятность того, что студент сдаст экзамен, равна 0,7. Найти вероятность того, что он не забудет зачетную книжку, если он подготовил к ответу 90 % вопросов.

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. При лечении травмы возможны врачебные ошибки: дефекты диагностики – 20 %, тактические ошибки – 40 %, ошибки консервативного лечения – 30 %, ошибки оперативного лечения – 10 %. В случае врачебной ошибки возможны осложнения в 10, 10, 20 и 50 % случаях соответственно.

Человек получил травму.

а) Найти вероятность того, что при лечении пациент получит осложнение.

б) Пациент получил осложнение. Найти вероятность того, что была сделана тактическая ошибка.

7. Вероятность сдачи зачета для каждого из 12 студентов равна 0,3. Найти вероятность того, что зачет сдадут: а) восемь студентов; б) наивероятнейшее число студентов; в) хотя бы шесть студентов.

8. Вероятность выигрыша в лотерею 0,025. Выпущено 400 билетов. Найти: а) количество билетов, которые надо купить, чтобы с вероятностью 0,09 можно было ожидать выигрыша; б) вероятность того, что выигрышных билетов будет от 15 до 20.

9. Студент Иванов не опаздывает на занятия с вероятностью 0,95; студент Петров – с вероятностью 0,9; студентка Сидорова – с вероятностью 0,99. СВ X – число студентов, приходящих на занятия вовремя.

Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ \dfrac{3}{2} - \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arcctg} x, & -1 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P\left(\left|X - M[X]\right| \le \sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+6}{24}, & x \in [-6; -2], \\ A, & x \in (-2; 2], \\ 0, & x \notin [-6; 2]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P(-3 < X < 1)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Общее содержание клетчатки в яблоке является СВ X и имеет нормальное распределение. Взята партия яблок одного сорта и примерно одинакового размера. Оказалось, что в одном яблоке содержится в среднем 2,8 г клетчатки. При этом 10 % яблок содержит клетчатки более 3 г. Найти среднее квадратическое отклонение содержания клетчатки в яблоке. Написать выражения для плотности распределения и функции распределения СВ X.

13. Среднее время безотказной работы аккумулятора равно 150 ч. Считая, что время безотказной работы аккумулятора подчинено показательному закону распределения, найти вероятность того, что: а) в течение 300 ч аккумулятор не выйдет из строя; б) аккумулятор проработает от 200 до 400 ч.

14. В урне содержатся 13 голубых и семь сиреневых шаров. Из нее извлекли два шара без возвращения. СВ X – число голубых шаров в выборке; Y – число сиреневых шаров в выборке. Составить закон распределения системы СВ (X, Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

$X \backslash Y$	– 2	– 1	0	1
– 3	0,1	0,2	0,2	0,1
0	C	0,1	0,09	0,06
3	0,02	0,03	0,04	0,01

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=-3$ и СВ X при $Y=-2$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x,y)$ непрерывной системы СВ (X, Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} A(x+3y), & \text{при } x+y<2,\ x\ge 0,\ y\ge 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Среднее значение измеряемой величины равно 60 см, а дисперсия равна 0,2 см^2. С помощью неравенства Чебышева оцените вероятность того, что измеряемая величина будет в пределах от 58,5 до 61,5 см.

Вариант 26

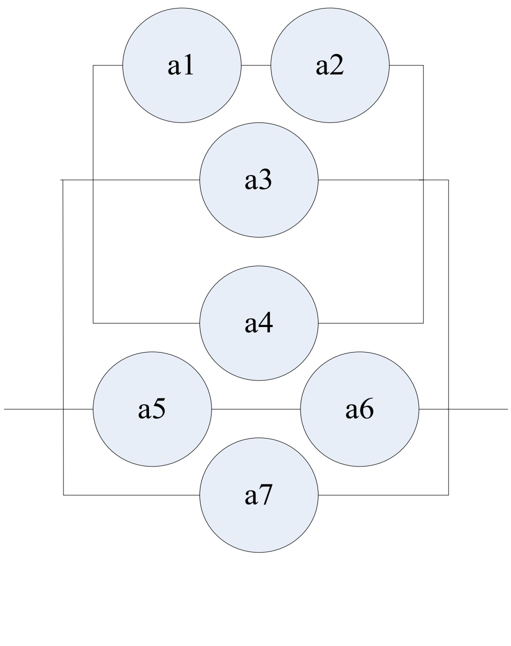
1. Пятеро студентов заказали путевки на турбазу. Профком выделил только три путевки на разные турбазы. Каким количеством способов можно распределить три различные путевки между пятью студентами?

2. На первенстве области по волейболу 30 команд разбиты на две равные подгруппы случайным образом. Найти вероятность того, что две сильнейшие команды попадут в разные подгруппы.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D: \{ 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1 \}$, попадет в заданную область $d: \left\{ \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 \le y \le 1 - x^2 \right\}$.

4. Два спортсмена сделали по одному выстрелу из орудия по цели. Вероятность одного попадания в цель одним залпом равна 0,64. Найти вероятность того, что цель будет поражена первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,7.

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. В типографии книги брошюруют вручную трое рабочих, производительность которых находится в отношении 4:3:3. Первый рабочий неверно брошюрует 2 % книг, второй – 1 %, третий – 2 %. Отбирается одна книга.

а) Найти вероятность того, что книга сброшюрована неверно.

б) Книга сброшюрована неверно. Найти вероятность того, что с ней работал второй брошюровщик.

7. 80 % продукции цеха художественных промыслов является продукцией высшего сорта. Найти вероятность того, что среди наудачу выбранных шести изделий: а) два изделия высшего сорта; б) наивероятнейшее количество изделий высшего сорта; в) хотя бы пять изделий высшего сорта.

8. По схеме выборки с возвращением из колоды в 52 карты извлекается одна карта. Опыт проведен 575 раз. Найти вероятность того, что: а) дама пик появится ровно 15 раз; б) валет треф появится от 17 до 35 раз.

9. Спортсмен стреляет по мишени «бегущий кабан» с вероятностью попадания 0,8 при одном выстреле. Стрельба ведется до первого попадания, причем спортсмен успевает сделать не более четырех выстрелов. СВ X – число сделанных выстрелов. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -4, \\ 1-\dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{x}{4}, & -4 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right| \le \sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{9}, & x \in [3; 6], \\ A(x-9), & x \in (6; 9], \\ 0, & x \notin [3; 9]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P(8 < X < 11)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Общее содержание жира в 100 г сыра сорта «Голландский» является СВ X и имеет нормальное распределение с параметрами $a = 27{,}3$ г, $\sigma = 0{,}8$ г. Какую долю жира можно гарантировать в случайно взятом куске сыра с вероятностью 0,9? Написать выражения для плотности распределения и функции распределения СВ X.

13. Завод отправил на склад 500 изделий. Для каждого изделия вероятность повреждения при транспортировке равна 0,008. Найти вероятность того, что среди прибывших на склад изделий будет: а) хотя бы два поврежденных изделия; б) пять поврежденных изделий.

14. В урне содержатся 14 синих и 11 желтых шаров. Из нее извлекли два шара без возвращения. СВ X – число синих шаров в выборке; Y – число желтых шаров в выборке. Составить закон распределения системы СВ (X, Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

X \ Y	– 4	– 3	– 2	– 1
– 1	0,02	C	0,1	0,01
0	0,1	0,2	0,2	0,07
1	0,03	0,1	0,08	0,04

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X = 1$ и СВ X при $Y = -4$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x,y)$ непрерывной системы СВ (X,Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} Axy, & \text{при} \quad 2x+3y\le 6,\; x\ge 1,\; y\ge 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Всхожесть семян огурцов равна 0,9. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что из 500 посеянных семян взойдет от 420 до 480 побегов.

Вариант 27

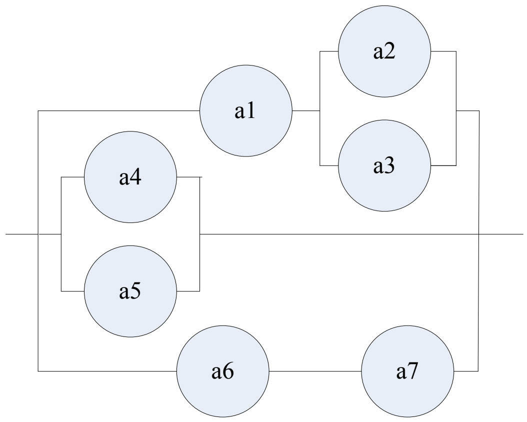
1. Десять приезжих размещаются в хостеле в двух трехместных и одном четырехместном номерах. Сколько существует способов их размещения?

2. В группе 10 юношей и 8 девушек. Найти вероятность того, что среди ушедших домой семи студентов три девушки.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{0\le x\le 1; 0\le y\le 1\}$, попадет в заданную область $d:\left\{y\le \min\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{3}; 4(1-x)\right)\right\}$.

4. Вероятность попадания в первую мишень для стрелка равна 0,86. Если первым выстрелом мишень поражена, то стрелок имеет право на выстрел по второй мишени. Вероятность поражения мишеней двумя выстрелами равна 0,7. Найти вероятность поражения второй мишени.

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. У бизнесмена Романа имеются банковские денежные вклады в рублях, евро и долларах в пропорции 5:2:3. Ему может понадобиться снять некоторую сумму денег в ближайший месяц с рублевого вклада с вероятностью 0,7; вклада в евро – 0,3; вклада в долларах – 0,1.

а) Найти вероятность того, что бизнесмену понадобятся деньги в ближайший месяц.

б) Роман снял деньги. Найти вероятность того, что он снял доллары.

7. Интернет-магазин имеет 10 постоянных заказчиков. Вероятность получения одной заявки от каждого из них равна 0,8. Найти вероятность получения заявки: а) от пяти заказчиков; б) наивероятнейшего числа заказчиков; в) хотя бы девяти заказчиков.

8. Вероятность наступления события в каждом из 2400 испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 1925 и не более 1970 раз; б) ровно 1942 раза.

9. Среди 15 жостовских подносов три – с одинаковой росписью. Подносы вынимают поочередно случайным образом, пока не достанут два с одинаковой росписью, при этом достают не более пяти подносов. СВ X – число извлеченных подносов. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-2, \\ \dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{2}, & -2\le x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X],\ D[X],\ \sigma_X$;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right|\le\sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x+9)}{7}, & x\in[-9;-8],\\ A, & x\in(-8;-5],\\ 0, & x\notin[-9;-5].\end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X],\ D[X],\ \sigma_X$;

г) $P(-6<X<-2)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Общее содержание белка в 100 г чечевицы является СВ X и имеет нормальное распределение с параметрами $a=24{,}8$ г, $\sigma=0{,}5$ г. Какова вероятность того, что доля белка во взятой пачке чечевицы составит 24–25 %. Написать выражения для плотности распределения и функции распределения СВ X.

13. На факультете учатся 548 человек. Найти вероятность того, что: а) у троих день рождения приходится на Новый год (1 января); б) у двоих день рождения 1 сентября.

14. В урне содержатся 14 синих и 11 желтых шаров. Из нее извлекли два шара без возвращения. СВ X – число синих шаров в выборке; Y – число желтых шаров в выборке. Составить закон распределения системы СВ (X, Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

$X \backslash Y$	-1	0	1	2
-4	0,09	0,05	0,2	0,2
0	0,06	0,04	0,02	0,1
4	0,07	0,08	0,01	C

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=0$ и СВ X при $Y=2$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x,y)$ непрерывной системы СВ (X, Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} A(3x-y), & \text{при } \ x+y>0,\ y<2,\ x<0, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Среднее значение количества студентов, пришедших в институт на занятия в определенный день недели, равно 5600 человек. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что количество студентов, пришедших в институт в этот день недели, не будет превышать 7000 человек.

Вариант 28

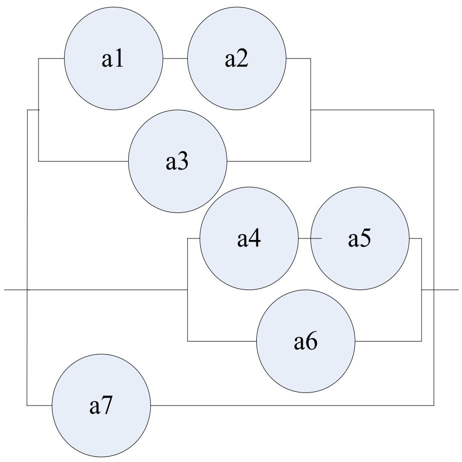
1. Из урны, содержащей шары с номерами 1, 2, 3, …, 9, вынимают пять шаров. Сколькими способами можно вынуть шары так, чтобы номера шаров составляли возрастающую последовательность?

2. Пять шариков разбрасываются по восьми лункам. Найти вероятность того, что все шарики окажутся в разных лунках.

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1\}$, попадет в заданную область $d:\left\{\dfrac{8}{27x} \le y \le 1 - x^2\right\}$.

4. Найти вероятность того, что наугад взятое изделие окажется первосортным, если известно, что 4 % всей продукции составляют нестандартные изделия, а 85 % стандартных изделий, кроме того, еще являются и первосортными.

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. Чтобы приготовить торт «Королевский», состоящий из трех коржей, необходимы изюм, грецкие орехи и мак (все остальные ингредиенты для приготовления торта у хозяйки уже есть). Вероятность того, что хозяйка найдет эти ингредиенты в соседнем магазине, равна 0,5; 0,4; 0,1 соответственно.

а) Найти вероятность того, что хозяйке не удалось испечь торт.

б) Торт не был испечен. Найти вероятность того, что хозяйка не смогла найти мак.

7. Брак на производстве плееров составляет 8 %. Найти вероятность того, что из взятых наугад шести плееров будет: а) пять небракованных; б) наивероятнейшее число небракованных; в) хотя бы четыре небракованных плеера.

8. Вероятность появления события А в каждом из 841 испытания равна 0,84. Найти вероятность того, что: а) событие А появится в этих испытаниях ровно 710 раз; б) событие А появится не менее 690 раз и не более 750 раз.

9. Два стрелка поражают мишень одним выстрелом с вероятностями 0,85 и 0,95 соответственно. СВ X – число попаданий в мишень, если первый стрелок выстрелил два раза, а второй стрелок – один раз. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-3, \\ 1-\dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{x}{3}, & -3\le x\le 3, \\ 1, & x>3. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right|\le\sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} A, & x\in[-6;-4], \\ -\dfrac{2(x+3)}{5}, & x\in(-4;-3], \\ 0, & x\notin[-6;-3]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P(-3{,}5<X<0)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Общее содержание углеводов в 100 г изюма является СВ X и имеет нормальное распределение с параметрами $a = 71{,}2$ г, $\sigma = 2{,}8$ г. Какова вероятность того, что доля углеводов в купленной упаковке изюма составит не более 70 %. Написать выражения для плотности распределения и функции распределения СВ X.

13. Вероятность того, что в большой партии содержится хотя бы одно бракованное изделие, равна 0,95. Найти: а) среднее число бракованных изделий в партии; б) вероятность того, что в партии хотя бы три бракованных изделия.

14. В урне содержатся пять красных, три синих и восемь белых шаров. Из нее извлекли два шара без возвращения. СВ X – число красных шаров в выборке; Y – число синих шаров в выборке. Составить закон распределения системы СВ (X, Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

X \ Y	– 2	0	2	4
– 3	0,09	0,2	C	0,07
– 1	0,1	0,2	0,1	0,06
1	0,03	0,03	0,01	0,02

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X = -3$ и СВ X при $Y = 2$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x,y)$ непрерывной системы СВ (X,Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} A(x+2y), & \text{при } \ x+y\le 3,\ x\ge 0,\ y\ge 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x),\ f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X],\ M[Y],\ \sigma_X, \sigma_Y$;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Среднее значение расхода газа в данном доме за месяц составляет 150 м^3. Оценить с помощью неравенства Маркова вероятность того, что расход не будет превышать 720 м^3.

Вариант 29

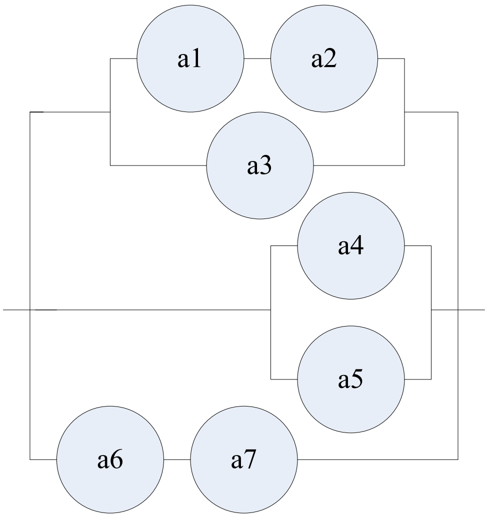
1. Группу из 15 студентов нужно разделить на три бригады так, чтобы в первую входило три человека, во вторую – пять человек и в третью – семь. Каким количеством способов это можно сделать?

2. Колоду из 54 карт разделили пополам. Какова вероятность того, что в каждой части будет по одному джокеру?

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1\}$, попадет в заданную область $d:\left\{1-\sqrt{1-x^2}\le y\le \sqrt{1-(x-1)^2}\right\}$.

4. Вероятность поражения цели спортсменом одним выстрелом равна 0,9. Сколько выстрелов он должен сделать, чтобы с вероятностью, не большей 0,3, можно утверждать, что промахов не будет?

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. По данным демографов, мужчин на планете 48 %, а женщин – 52 %. Среди мужчин дальтоников около 5 %, а среди женщин – 0,4 %.

а) Найти вероятность того, что случайно выбранный человек является дальтоником.

б) Оказалось, что случайно выбранный человек является дальтоником. Найти вероятность того, что это женщина.

7. Вероятность опоздания на занятия для каждого из 10 студентов равна 0,8. Найти вероятность того, что сегодня: а) опоздают пять студентов; б) опоздает наивероятнейшее число студентов, в) хотя бы три студента не опоздают.

8. Вероятность того, что спортсмен пробежит марафонскую дистанцию, равна 0,7. На старт пришли 512 спортсменов. Найти: а) количество спортсменов, которых следует ожидать на финише с вероятностью 0,008; б) вероятность, что до финиша добегут не менее 340, но не более 390 спортсменов.

9. Монету подбрасывают до тех пор, пока герб не выпадет дважды, но не более четырех раз. СВ X – число подбрасываний. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -4, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{4}, & -4 \le x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right|\le\sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины *X*:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x-4)}{3}, & x\in[4;5],\\ A, & x\in(5;6],\\ 0, & x\notin[4;6].\end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P(0<X<4{,}5)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Количество килокалорий в одном авокадо является СВ *X*, распределенной по нормальному закону, и в среднем равно 208 Ккал. Взята партия авокадо. Оказалось, что 5 % авокадо содержит не более 200 Ккал. Найти среднее квадратическое отклонение количества килокалорий в одном авокадо. Написать выражения для плотности распределения и функции распределения СВ *X*.

13. Аппаратура состоит из 10000 элементов, каждый из которых выходит из строя за время T с вероятностью $p=5\cdot10^{-4}$. Найти вероятность того, что за время T откажут: а) ровно три элемента; б) не менее пяти элементов.

14. Игральная кость бросается до тех пор, пока не выпадет больше трех очков, но не более четырех раз. СВ X – число очков, выпавших при последнем бросании игральной кости, Y – число бросаний кости. Составить закон распределения системы СВ (X,Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

$X \backslash Y$	– 3	0	3	6
– 1	0,03	0,02	0,01	0,07
1	0,1	0,09	0,06	0,05
3	C	0,2	0,08	0,09

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=1$ и СВ X при $Y=6$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x, y)$ непрерывной системы СВ (X, Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} Axy^2, & \text{при } \; x+y<0, \; y\geq -2, \; x>0, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Математическое ожидание отклонения от центра круглой мишени при стрельбе составляет 5 см. С помощью неравенства Маркова оцените вероятность того, что при стрельбе по мишени радиуса 16 см мишень будет поражена.

Вариант 30

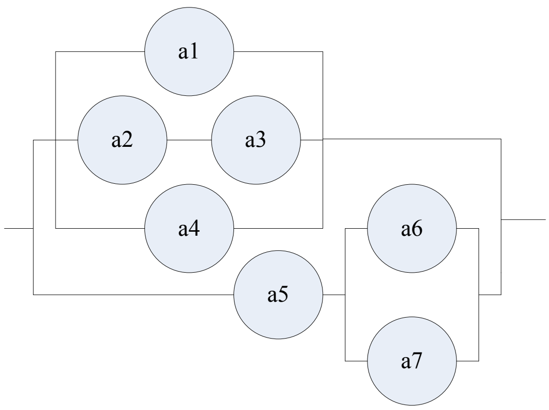
1. Каким количеством способов можно распределить шесть поездов на девяти запасных путях, если на запасном пути может находиться любое количество поездов?

2. В комоде пять ящиков. В них наудачу разместили восемь предметов. Какова вероятность того, что в одном ящике три предмета, а в другом пять?

3. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в область $D:\{0 \le x \le 1;\, 0 \le y \le 1\}$, попадет в заданную область $d:\left\{\frac{2}{\pi}\arcsin x \le y \le \sqrt[5]{x}\right\}$.

4. Два игрока по очереди бросают игральную кость. Выигрывает тот, у кого первым выпадет шесть очков. Найти вероятность выигрыша второго игрока.

5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,8	0,7	0,9	0,3	0,8	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

6. По данным организации Statinfo.biz в 2007 году в России проживало 65,6416 млн мужчин и 76,2624 млн женщин. Уровень безработных по тому же источнику среди женщин составляет 5,8 %, среди мужчин – 6,4 %.

а) Найти вероятность того, что случайно выбранный человек – безработный.

б) Оказалось, что случайно выбранный человек безработный. Найти вероятность того, что это мужчина.

7. Вероятность покупки для каждого из восьми посетителей магазина равна 0,9. Найти вероятность того, что что-либо купят: а) три покупателя; б) наивероятнейшее число покупателей; в) хотя бы семь покупателей.

8. Вероятность того, что первокурсник окончит университет, равна 0,4. На первый курс поступили 1500 абитуриентов. Найти: а) количество выпускников университета, которое через 4 года можно ожидать с вероятностью 0,01; б) вероятность того, что через 4 года выпускников университета будет не менее 590, но не более 605?

9. Вероятность сдачи экзамена студентом равна 0,2. Экзамен проводится до тех пор, пока студент не получит тройку, но не более шести раз. СВ X – число попыток сдачи экзамена. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

10. Задана функция распределения $F(x)$ случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin x, & -1\le x\le 1, \\ 1, & x>1. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right|\le\sigma_X\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

11. Задана плотность распределения $f(x)$ случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{11}, & x\in[-5;-1], \\ A(x-2), & x\in(-1;2], \\ 0, & x\notin[-5;2]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

г) $P(1<X<4)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

12. Время обработки одного типа деталей на станке является СВ X и имеет нормальное распределение с параметрами $a=24$ мин, $\sigma=2$ мин.

Какова вероятность того, что время обработки детали будет на одну минуту отличаться от среднего? Написать выражения для плотности распределения и функции распределения СВ X.

13. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в час, равно 7200. Найти вероятность того, что: а) за 2 с не поступит ни одного вызова; б) за 3 с поступят хотя бы три вызова.

14. По мишени производится один выстрел. Вероятность попадания равна 0,65. Рассматриваются две СВ: X – число попаданий, Y – число промахов. Составить закон распределения системы СВ (X, Y). Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

15. Задан закон распределения дискретной системы СВ (X, Y):

$X \backslash Y$	– 1	1	3	5
– 2	0,01	0,06	0,1	0,02
0	0,04	C	0,2	0,03
2	0,08	0,1	0,2	0,07

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=0$ и СВ X при $Y=-1$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

16. Задана плотность совместного распределения $f(x,y)$ непрерывной системы СВ (X, Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} Ax^3y, & \text{при } x+2y \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

17. Проводится 2000 испытаний. Вероятность некоторого события в одном испытании $p = 0,8$. С помощью неравенства Чебышева оценить, в каких границах находится та относительная частота события, вероятность отклонения которой от этой вероятности равна 0,985.

ГЛАВА 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДЕМОНСТРАЦИОННОГО ВАРИАНТА

ЗАДАЧА 1. Каким количеством способов можно составить расписание на один день, если школьники изучают всего восемь предметов, а в день должно быть шесть разных уроков?

РЕШЕНИЕ. Учитывая то, что в один день все уроки должны быть разными, первый урок можно выбрать восемью способами, второй – семью, третий – шестью и т. д., получим: $n = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 20160$.

Иначе: поскольку расписания отличаются либо предметами, либо порядком уроков в день, имеем схему размещения без повторений (2):

$$n = A_8^6 = \frac{8!}{2!} = 20160.$$

ЗАДАЧА 2. На столе в линию положили ручку, карандаш и восемь пуговиц разных цветов. Какова вероятность того, что ручка и карандаш оказались рядом?

РЕШЕНИЕ. Всего имеем $n = 10!$ способов расположения пуговиц, карандаша и ручки в одну линию.

Для вычисления благоприятных случаев представим, что ручка и карандаш склеены (тут два способа: ручка, карандаш или карандаш, ручка). Тогда всего элементов будет 9. Их можно переставить 9! способами. Поэтому $m = 2 \cdot 9!$ Искомая вероятность, согласно классическому определению вероятности, равна

$$p = \frac{m}{n} = \frac{2 \cdot 9!}{10!} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

ЗАДАЧА 3. Найти вероятность того, что наудачу брошенная точка в область $D: \{ 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1 \}$ попадет в заданную область

$$d: \left\{ y \le \min\left(2 - e^{x - \frac{1}{3}}; \lg\left(27x + 1\right) \right) \right\}.$$

РЕШЕНИЕ. В любой из программ (MATHCAD, EXCEL, MATHLAB и т. д.) построим графики заданных функций (рис. 9). На отрезке $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ меньшее значение принимает функция $y=\lg\left(27x+1\right)$, так как ее график лежит ниже графика функции $y=2-e^{x-\frac{1}{3}}$, а на отрезке $\left[\frac{1}{3},1\right]$ меньшее значение принимает функция $y=2-e^{x-\frac{1}{3}}$.

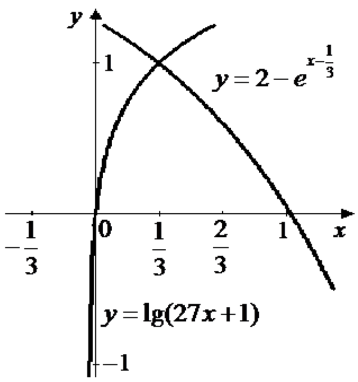


Рис. 9. Функции $y=2-e^{x-\frac{1}{3}}$; $y=\lg\left(27x+1\right)$

На рис. 10 показана область *d*. Она ограничена прямой $y = 0$ и кривыми $y=\lg\left(27x+1\right), x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$ и $y=2-e^{x-\frac{1}{3}}$, $x\in\left[\frac{1}{3},1\right]$. Точкой пересечения этих кривых является точка $\left(\frac{1}{3};1\right)$. Поскольку площадь области *D* равна 1, то $p\left(y\le\min\left(\lg\left(27x+1\right);\,2-e^{x-\frac{1}{3}}\right)\right)=\int\limits_0^{1/3}\lg\left(27x+1\right)dx+\int\limits_{1/3}^{1}(2-e^{x-\frac{1}{3}})dx=0{,}611$.

Первый интеграл вычислен по частям. Иначе значения интегралов можно найти, используя расширенную таблицу интегралов, или можно воспользоваться любым известным пакетом программ.

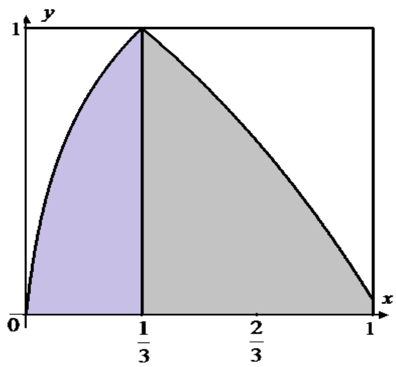


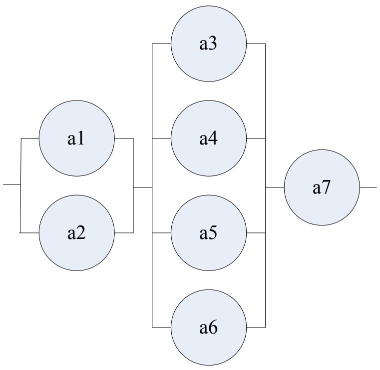
Рис. 10. Область *d*

ЗАДАЧА 4. В коробке 5 синих и 10 желтых шаров. Из нее вынули 2 шара. Найти вероятность того, что они одного цвета.

РЕШЕНИЕ. Всего в коробке лежат 15 шаров. Два шара можно вынуть $C_{15}^2 = \dfrac{15!}{2!13!} = 105$ способами. Два синих шара можно вынуть $C_5^2 = \dfrac{5!}{2!3!} = 10$ способами, а два желтых – $C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2!8!} = 45$ способами. Поскольку благоприятным будет вынуть или два синих, или два желтых шара, то, используя теорему сложения для несовместных событий (4), получим

$$p = \frac{C_5^2}{C_{15}^2} + \frac{C_{10}^2}{C_{15}^2} = \frac{11}{21}.$$

ЗАДАЧА 5.



Вероятности надежной работы каждого из 7 элементов электрической цепи приведены в таблице.

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$	$a7$
0,9	0,8	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7

Найти вероятность безотказной работы цепи.

РЕШЕНИЕ. Событие A, заключающееся в том, что система надежна, имеет вид: $A = (A_1 + A_2)\cdot(A_3 + A_4 + A_5 + A_6)\cdot A_7 = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3$, где событие A_i состоит в том, что элемент a_i надежен, а событие B_i состоит в том, что *i*-й блок надежен. Найдем вероятность безотказной работы каждого звена, входящего в цепь.

$$P(B_1) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2) = 0{,}9 + 0{,}8 - 0{,}72 = 0{,}98.$$

Эту же вероятность можно вычислить по-другому, используя вероятность противоположного события:

$$P(B_1) = P(A_1 + A_2) = 1 - P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}1\cdot 0{,}2 = 0{,}98.$$

Вероятность надежности второго звена удобнее выражать через вероятности противоположных событий:

$$P\left(B_2\right)=P\left(A_3+A_4+A_5+A_6\right)=1-P\left(\overline{A_3}\right)\cdot P\left(\overline{A_4}\right)\cdot P\left(\overline{A_5}\right)\cdot P\left(\overline{A_6}\right)=$$
$$=1-0,7\cdot 0,6\cdot 0,5\cdot 0,4=0,916.$$

И вероятность надежности последнего звена B_3 задана в таблице:

$$P\left(B_3\right)=P\left(A_7\right)=0,7.$$

По теореме умножения для независимых событий (5) получим вероятность безотказной работы цепи:

$$P\left(A\right)=P\left(B_1\right)\cdot P\left(B_2\right)\cdot P\left(B_3\right)=0,98\cdot 0,916\cdot 0,7\approx 0,628.$$

ЗАДАЧА 6. На производстве выпускают три вида продукции в соотношении 3:2:1. Для каждого вида продукции брак составляет 5, 1 и 2 % соответственно.

а) Найти вероятность того, что случайно взятое изделие без брака.

б) Было взято изделие без брака. Найти вероятность того, что оно принадлежит первому виду продукции.

РЕШЕНИЕ. Из условий задачи следует, что вся продукция составляет шесть частей, при этом доли каждого вида продукции равны соответственно $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$.

Обозначим событие A – случайно взятое изделие без брака.

Это событие может произойти только при условии выполнения одного из трех возможных и попарно несовместных событий (гипотез):

H_1 – случайно взятое изделие оказалось первым видом продукции;

H_2 – случайно взятое изделие оказалось вторым видом продукции;

H_3 – случайно взятое изделие оказалось третьим видом продукции.

Вероятности гипотез равны:

$$P\left(H_1\right)=\frac{1}{2};\ P\left(H_2\right)=\frac{1}{3};P\left(H_3\right)=\frac{1}{6};\ P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=1.$$

Условные вероятности заданы:

$$P\left(A\middle|H_1\right)=0{,}95;\ \ P\left(A\middle|H_2\right)=0{,}99;\ P\left(A\middle|H_3\right)=0{,}98.$$

а) По формуле полной вероятности (6) вычисляем

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(H_k)P\left(A\middle|H_k\right);\ P(A)=\frac{1}{2}\cdot 0{,}95+\frac{1}{3}\cdot 0{,}99+\frac{1}{6}\cdot 0{,}98\approx 0{,}97.$$

б) Апостериорную вероятность (после проведения опыта) найдем по формуле Байеса (7):

$$P\left(H_k\middle|A\right)=\frac{P(H_k)P\left(A\middle|H_k\right)}{P(A)};\ P\left(H_1\middle|A\right)=\frac{0{,}5\cdot 0{,}95}{0{,}97}\approx 0{,}49\,.$$

ЗАДАЧА 7. Вероятность того, что каждый из 10 спортсменов пробежит марафонскую дистанцию, равна 0,4. Найти вероятность того, что до финиша добегут: а) девять спортсменов; б) наивероятнейшее число спортсменов; в) хотя бы три спортсмена.

РЕШЕНИЕ. Пусть m – число спортсменов, добежавших до финиша. Вероятность $P_n(m)$ того, что в n испытаниях событие наступит m раз, определяется формулой Бернулли (8): $P_n(m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}$, $m=0,1,2,...n$. Из условий задачи следует, что $n=10;\ p=0{,}4;\ q=0{,}6$, поэтому:

а) $P_{10}(9)=C_{10}^{9}\,0{,}4^9\cdot 0{,}6\approx 0{,}002$;

б) наивероятнейшее число спортсменов найдем по формуле (9) $np-q\le k\le np+p$; $10\cdot 4-0{,}6\le k\le 10\cdot 4+0{,}4$; $3{,}4\le k\le 4{,}4$. В указанный промежуток попадает только одно целое число $k=4$. Вероятность того, что до финиша добегут четыре, спортсмена (наивероятнейшее число спортсменов) вычисляется по формуле Бернулли (8):

$$P_{10}(4)=C_{10}^{4}\,0{,}4^4\,0{,}6^6\approx 0{,}25\,.$$

в) выражение «хотя бы 3 спортсмена» подразумевает, что до финиша добегут или три, или четыре, или пять и т. д. спортсменов, т. е. $m\ge 3$. Поэтому в данном случае проще вычислить вероятность противоположного события

$$p_{10}(m\le 2)=p_{10}(0)+p_{10}(1)+p_{10}(2)=C_{10}^{0}\,0{,}4^0\,0{,}6^{10}+C_{10}^{1}\,0{,}4^1\,0{,}6^9+C_{10}^{2}\,0{,}4^2\,0{,}6^8\approx 0{,}17,$$

$$p_{10}(m\ge 3)\approx 1-0{,}17=0{,}83\,.$$

ЗАДАЧА 8. В одном из читальных залов университета студентами заняты 144 посадочных места. Каждый студент с вероятностью 0,36 берет сборник задач по математическому анализу. Выяснить: а) требование какого числа задачников возникнет с вероятностью 0,035; б) вероятность того, потребуется не менее 30, но не более 45 задачников.

РЕШЕНИЕ. а) Обозначим через m число задачников, которое востребуется с вероятностью 0,035. Из условий задачи следует: $n=144;\ p=0,36;\ q=0,64$. Подставим эти значения в локальную теорему Муавра – Лапласа (11):

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right);$$

$$0,035 \approx \frac{1}{\sqrt{144\cdot 0,36\cdot 0,64}}\varphi\left(\frac{m-144\cdot 0,36}{\sqrt{144\cdot 0,36\cdot 0,44}}\right);\ 0,2016\approx\varphi\left(\frac{m-51,84}{5,76}\right).$$

Из таблицы значений $\varphi(x)$ (прил. 1) найдем:

$$1,17 \approx \left|\frac{m-51,84}{5,76}\right|.$$

Тогда $m = 59$ или $m = 45$.

б) Из условий задачи: $n=144;\ p=0,36;\ q=0,64$. Так как в задаче требуется найти вероятность попадания в отрезок $[30,45]$, то воспользуемся интегральной теоремой Муавра – Лапласа (12), обозначив $m_1=30,\ m_2=45$.

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

$$p\left(30\le m \le 45\right) \approx \Phi\left(\frac{45-144\cdot 0,36}{\sqrt{144\cdot 0,36\cdot 0,64}}\right) - \Phi\left(\frac{30-144\cdot 0,36}{\sqrt{144\cdot 0,36\cdot 0,64}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi(-1,19) - \Phi(-0,45) = \Phi(0,45) - \Phi(1,19) \approx 0,5 - 0,38 = 0,12.$$

ЗАДАЧА 9. Вероятность соединения по телефону-автомату равна 0,6. Некто пытается дозвониться, имея в наличии четыре монеты. СВ X – число истраченных монет. Найти: а) закон распределения СВ X; б) $M[X], D[X], \sigma_X$; в) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

РЕШЕНИЕ. а) Из условия задачи следует, что если СВ $X=1$, то дозвониться удалось с первой попытки; если СВ $X=2$, то дозвониться удалось со второй, то есть в первый раз произошел сбой, а во второй – соединение и т. д. Закон распределения имеет вид:

X	1	2	3	4
p	0,6	$0,4\cdot 0,6=0,24$	$0,4^2\cdot 0,6=0,096$	$0,4^3\cdot 0,6+0,4^4=0,064$

Убедимся, что сумма вероятностей равна 1:

$$0,6+0,24+0,096+0,064=1.$$

б) Математическое ожидание $M[X]$ вычислим по формуле (16):

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i=1\cdot 0,6+2\cdot 0,24+3\cdot 0,096+4\cdot 0,064=1,624.$$

Дисперсию вычислим по свойству (19):

$$D[X]=M\left[X^2\right]-\left(M[X]\right)^2=1\cdot 0,6+4\cdot 0,24+9\cdot 0,096+16\cdot 0,064-(1,624)^2\approx 0,81,$$
$$\sigma_X\approx\sqrt{0,81}=0,9.$$

в) По определению функции распределения $F(x)=P(X<x), x\in\mathbb{R}$ находим:

если $x\le 1$, то $F(x)=p(X<x)=0$;

если $1<x\le 2$, то $F(x)=p(X<x)=p(X=1)=0,6$;

если $2<x\le 3$, то $F(x)=p(X<x)=p(X=1)+p(X=2)=0,6+0,24=0,84$;

если $3<x\le 4$, то $F(x)=p(X<x)=p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)=0,936$;

если $x>4$, то $F(x)=p(X<x)=p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)+p(X=4)=1.$

То есть функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ 0,6 & 1< x\le 2,\\ 0,84 & 2< x\le 3,\\ 0,936, & 3< x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

График функции распределения представлен на рис. 11.

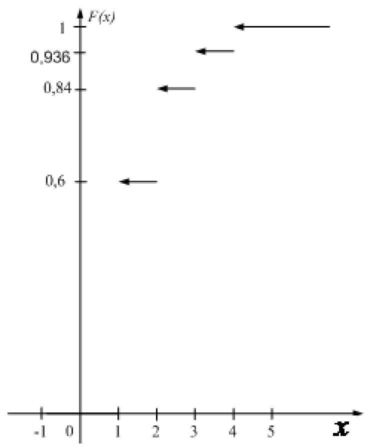


Рис. 11. Функция распределения

ЗАДАЧА 10. Задана функция распределения $F(x)$ СВ *X*:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<\dfrac{\pi}{6},\\ 1-\sin 3x, & \dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{\pi}{3},\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) $M[X]$, $D[X]$, σ_X;

в) $P\left(\left|X-M[X]\right|\le\sigma_x\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

РЕШЕНИЕ. а) Плотность распределения является производной от функции распределения согласно свойству (15): $f(x)=F'(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<\dfrac{\pi}{6},\\ -3\cos 3x, & \dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$$

б) Математическое ожидание вычислим согласно формуле (17), используя формулу интегрирования по частям:

$$M\left[X\right]=m_X=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f\left(x\right)dx=-3\int_{\pi/6}^{\pi/3}x\cos 3x\,dx\approx 0{,}857.$$

При вычислении дисперсии, согласно (19), применим дважды формулу интегрирования по частям:

$$D\left[X\right]=\int x^2 f(x)dx-\left(M\left[X\right]\right)^2=-3\int_{\pi/6}^{\pi/3}x^2\cos 3\text{x}\,dx-0{,}857^2\approx 0{,}016.$$

Среднее квадратическое отклонение найдем по определению (18):

$$\sigma\left[X\right]=\sqrt{D\left[X\right]}\approx\sqrt{0{,}016}=0{,}126.$$

в) Вероятность отклонения случайной величины от математического ожидания вычислим исходя из свойства (14):

$$P(x_1\le x\le x_2)=F(x_2)-F(x_1),$$

$$P\left(\left|X-0{,}875\right|\le 0{,}126\right)=P\left(-0{,}126\le X-0{,}857\le 0{,}126\right)=P\left(0{,}731<X<0{,}983\right)=$$

$$=F\left(0{,}983\right)-F\left(0{,}731\right)=1-\sin\left(3\left(0{,}983\right)\right)-\left(1-\sin 3\left(0{,}731\right)\right)\approx 0{,}621.$$

г) Графики плотности распределения и функции распределения представлены на рис. 12 и 13.

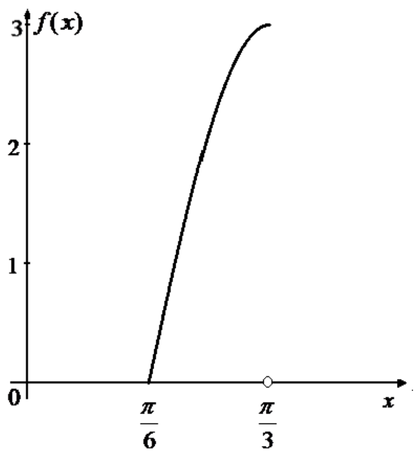


Рис. 12. Плотность распределения

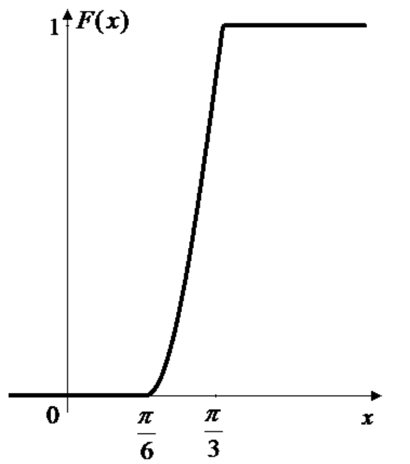


Рис. 13. Функция распределения

ЗАДАЧА 11. Задана плотность распределения $f(x)$ СВ X:

$$f(x)=\begin{cases} A\left(x+1\right), & x\in\left[-1;3\right], \\ \dfrac{5-x}{6}, & x\in\left(3;5\right], \\ 0, & x\notin\left[-1;5\right]. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $M\left[X\right]$, $D\left[X\right]$, σ_x;

г) $P\left(7<X<10\right)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

РЕШЕНИЕ. а) Параметр A найдем из основного свойства плотности распределения: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$.

$$A\int\limits_{-1}^{3}\left(x+1\right)dx-\frac{1}{6}\int\limits_{3}^{5}(x-5)dx=A\frac{(x+1)^2}{2}\Bigg|_{-1}^{3}-\frac{(5-x)^2}{12}\Bigg|_{3}^{5}=8A+\frac{1}{3}=1;\quad A=\frac{1}{12}.$$

Тогда плотность распределения СВ X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{(x+1)}{12}, & x\in\left[-1;3\right], \\ \dfrac{5-x}{6}, & x\in\left(3;5\right], \\ 0, & x\notin\left[-1;5\right]. \end{cases}$$

б) Функцию распределения $F(x)$ найдем по формуле $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$

Если $x\le -1$, то $F(x)=0$.

Если $-1<x\le 3$, то $F(x)=\dfrac{1}{12}\int\limits_{-1}^{x}(t+1)dt=\dfrac{(x+1)^2}{24}\Bigg|_{-1}^{x}=\dfrac{(x+1)^2}{24}$.

Если $3<x\le 5$, то

$$F(x)=\frac{1}{12}\int\limits_{-1}^{3}\left(t+1\right)dt-\frac{1}{6}\int\limits_{3}^{x}\left(t-5\right)dt=\frac{(t+1)^2}{24}\Bigg|_{-1}^{3}-\frac{(t-5)^2}{12}\Bigg|_{3}^{x}=1-\frac{(x-5)^2}{12}.$$

Если $x>5$, то $F(x)=\dfrac{1}{12}\int\limits_{-1}^{3}\left(t+1\right)dt-\dfrac{1}{6}\int\limits_{3}^{5}\left(t-5\right)dt=1$.

Итак, функция распределения СВ X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1; \\ \dfrac{1}{24}\left(x+1\right)^2, & -1<x\le 3; \\ 1-\dfrac{(x-5)^2}{12}, & 3<x\le 5; \\ 1, & x>5. \end{cases}$$

в, г) Математическое ожидание СВ X найдем по формуле (17):

$$M\left[X\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx=\frac{1}{12}\int\limits_{-1}^{3} x\left(x+1\right)dx-\frac{1}{6}\int\limits_{3}^{5} x\left(x-5\right)dx=\frac{7}{3}.$$

Дисперсию найдем по свойству (20):

$$D\left[X\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx-\left(M\left[X\right]\right)^2=\frac{1}{12}\int\limits_{-1}^{3} x^2\left(x+1\right)dx-\frac{1}{6}\int\limits_{3}^{5} x^2\left(x-5\right)dx-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{14}{9}.$$

Среднее квадратическое отклонение найдем по определению (18):

$$\sigma\left[X\right]=\sqrt{D\left[X\right]}=\sqrt{\frac{14}{9}}=\frac{\sqrt{14}}{3}.$$

Вероятность попадания в интервал можно вычислить двумя способами:

$$P\left(x_1<X<x_2\right)=\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx;\ P\left(4<X<8\right)=-\frac{1}{6}\int\limits_{4}^{5}\left(x-5\right)dx=\frac{1}{12}.$$

Иначе:

$$P\left(x_1<X<x_2\right)=F(x_2)-F(x_1),$$

$$P\left(4<X<8\right)=F(8)-F(4)=1-\left(1-\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{12}.$$

д) Графики плотности распределения и функции распределения представлены на рис. 14 и 15.

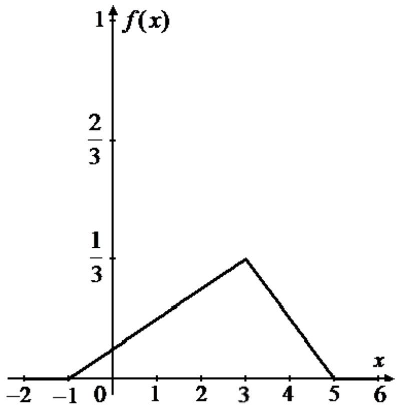


Рис. 14. Плотность распределения

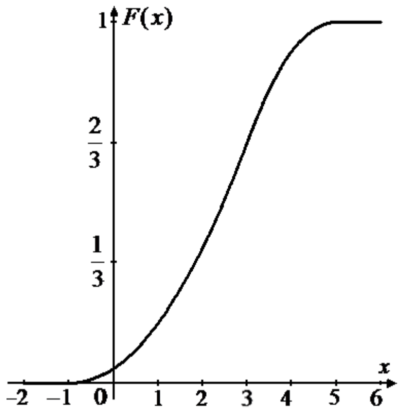


Рис. 15. Функция распределения

ЗАДАЧА 12. Полученные абитуриентами баллы на экзамене по информатике имеют нормальный закон распределения. Допустим, что средний балл составил 63,1 и 8,6 % абитуриентов получили менее 40 баллов.

Найти:

а) среднее квадратическое отклонение полученных баллов;

б) процент абитуриентов, результаты которых попадают в интервал от 60 до 70 баллов;

в) процент абитуриентов, результаты которых выше 80 баллов.

г) Какими должны быть результаты, симметричные относительно среднего балла, у 75 % абитуриентов?

д) Написать выражения для плотности распределения и функции распределения СВ X – количества полученных абитуриентами баллов на экзамене, построить их графики.

РЕШЕНИЕ. а) В условиях задачи сказано, что $a = 63{,}1$. Вероятность получения абитуриентами менее 40 баллов равна 0,086. Подставим эти данные в формулу (24). Функция $\Phi(x)$ – нечетная: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, поэтому $P(X < x_2) = F(x_2) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right)$, $P(X<40) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{40 - 63{,}1}{\sigma}\right) = 0{,}086$, отсюда $\Phi = \left(\frac{23{,}1}{\sigma}\right) = 0{,}414.$ По таблице Φ (x) (прил. 2) находим $\frac{23{,}1}{\sigma}$ = 1,365, тогда σ = 16,923.

б) Согласно формуле (25) получим

$$P(60<X<70)=\Phi\left(\frac{70-63{,}1}{16{,}923}\right)-\Phi\left(\frac{60-63{,}1}{16{,}923}\right)=0{,}1591+0{,}0714=0{,}2305\,.$$

Это означает, что 23 % абитуриентов получат от 60 до 70 баллов на экзамене.

в) Через вероятность противоположного события найдем вероятность получения абитуриентами более 80 баллов.

$$P(X>80)=1-P(X\le 80)=1-\left(\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{80-63{,}1}{16{,}923}\right)\right)=0{,}1587.$$

Итак, 15,87 % абитуриентов сдали экзамен более чем на 80 баллов.

г) Найдем границы интервала, симметричного относительно математического ожидания, в котором будет заключено то количество баллов, которое получат 75 % абитуриентов. По формуле (26) найдем ε:

$$P(|X-63{,}1|<\varepsilon)=0{,}75=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{16{,}923}\right),\ \ \Phi\left(\frac{\varepsilon}{16{,}923}\right)=0{,}375,\ \ \frac{\varepsilon}{16{,}923}=1{,}15,$$

отсюда $\varepsilon = 19{,}46$.

Тогда интервал равен (63,1 – 19,46; 63,1+19,46) = (43,64; 82,56).
То есть 75 % абитуриентов на экзамене получат от 43,64 до 82,56 баллов.

д) Запишем выражения плотности распределения и функции распределения согласно (22) и (23):

$$f(x)=\frac{1}{16{,}923\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-63{,}1)^2}{2\cdot 16{,}923^2}},\ \ F(x)=\frac{1}{16{,}923\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-63{,}1)^2}{2\cdot 16{,}923^2}}dt\,.$$

Графики, представленные на рис. 16 и 17, можно построить в любом редакторе.

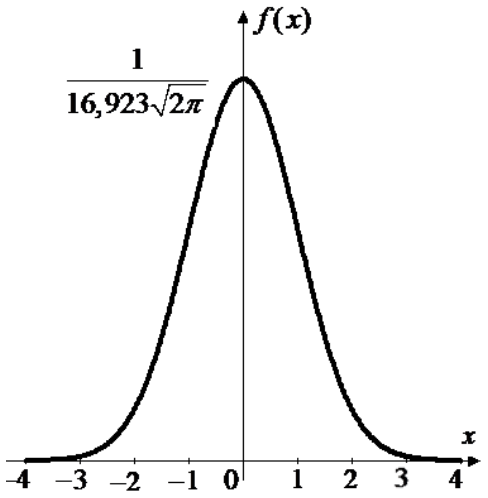


Рис. 16. Плотность распределения

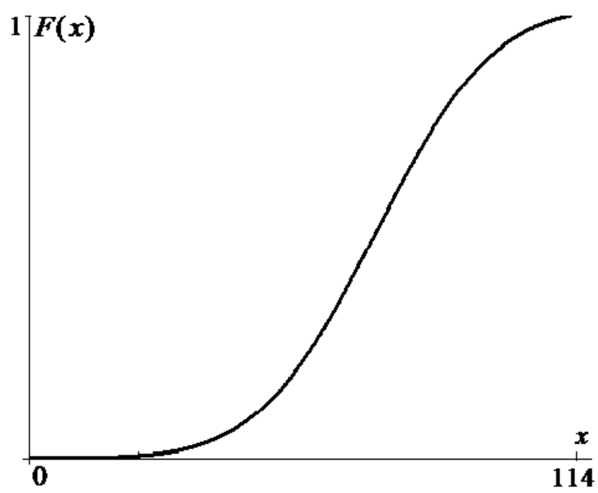


Рис. 17. Функция распределения

ЗАДАЧА 13.1. В казино находятся 1000 игроков. Вероятность выигрыша для одного игрока в течение часа равна 0,005. Найти вероятность того, что в течение часа выиграет: а) хотя бы один игрок; б) не менее четырех игроков.

РЕШЕНИЕ. Пусть СВ X – число выигравших из 1000 игроков. Исходя из формулировки задачи, заключаем, что при большом количестве испытаний $n=1000$ и малой вероятности $p=0{,}005$ наступления события в каждом из них (при этом $npq=4{,}975<10$) можно считать, что СВ X распределена по закону Пуассона (10): $P_n(X=m)\approx\dfrac{a^m}{m!}e^{-a}$ с математическим ожиданием $a=np=5$.

а) Выигрыш хотя бы одного игрока означает, что выигравших будет один или более. Противоположным событием будет проигрыш всех игроков (ни одного выигрыша). По формуле нахождения вероятности противоположного события найдем

$$P(x\ge 1)=1-P(x=0)=1-\frac{5^0}{0!}e^{-5}=0{,}9933.$$

б) Аналогично найдем вероятность выигрыша не менее четырьмя игроками. То есть в выигрыше должно быть любое количество игроков, большее или равное четырем. Проще воспользоваться формулой вероятности противоположного события:

$$p(X \geq 4) = 1 - \left(p(X=0) + p(X=1) + p(x=2) + p(X=3)\right) = 0,735.$$

ЗАДАЧА 13.2. 80 % батареек теряют заряд, проработав менее 900 ч. Найти вероятность того, что у батарейки закончится заряд в промежутке от 150 до 300 ч работы.

РЕШЕНИЕ. Пусть T – время безотказной работы батарейки, оно подчинено показательному закону распределения. Найдем параметр λ, используя формулу (21):

$$p(T \geq 900) = R(T) = e^{-\lambda \cdot 900} = 0,2;\ \ln e^{-\lambda \cdot 900} = \ln(0,2);\ \lambda = \frac{\ln(0,2)}{-900} = 0,0018.$$

Тогда искомая вероятность будет равна

$$p(150 \leq T \leq 300) = F(300) - F(150) = (1 - e^{-\lambda \cdot 300}) - (1 - e^{-\lambda \cdot 150}) =$$
$$= e^{-0,0018 \cdot 150} - e^{-0,0018 \cdot 300} \approx 0,181.$$

ЗАДАЧА 14. Три раза бросают игральную кость. СВ X – число появления цифры 5; СВ Y – число появления нечетной цифры. Составить закон распределения системы $CB(X, Y)$. Установить, являются ли СВ X и Y зависимыми.

РЕШЕНИЕ. Очевидно, что СВ X и Y принимают значения 0, 1, 2, 3. Найдем $p_{i,j} = P(X = i, Y = j)$; $i = 0,1,2,3$; $\mathrm{j} = 0,1,2,3$ по классическому определению вероятности. Здесь $n = \overline{A}_n^m = 6^3 = 216$.

Найдем число благоприятных исходов для $p_{0,0}$ (ни разу не появилась цифра 5 и ни разу не появилась нечетная цифра). Так как при трех бросаниях не может появиться нечетная цифра, то выпасть могут только цифры 2, 4, 6 в любых комбинациях с повторением, поэтому из (1) получим $m = \overline{A}_3^3 = 3^3$. Вероятность равна $p_{0,0} = \dfrac{27}{216} = \dfrac{1}{8}$.

При вычислении вероятности $p_{0,1}$ заметим, что выпасть может либо один раз цифра 1 и любые две четные цифры из 2, 4, 6; либо один раз цифра 3 и также любые две четные цифры из 2, 4, 6. Таким образом, четные цифры могут выпасть девятью способами, нечетные – двумя, и переставить любую группу из двух четных цифр и одной нечетной цифры можно $P_3(2,1)=3$ способами. Итак, $m=P_3(2,1)\overline{A}_3^2\,\overline{A}_2^1=54$ по формулам (1) и (3). Вероятность $p_{0,1}=\frac{54}{216}=\frac{1}{4}$.

Вычислим $p_{0,2}$. Выпасть может одна из четных граней 2, 4, 6 и любая комбинация из двух нечетных: 1,1; 1,3; 3,1; 3,3. Поэтому по тем же формулам найдем $m=P_3(1,2)\overline{A}_2^2\,\overline{A}_3^1=36$. Тогда $p_{0,2}=\frac{36}{216}=\frac{1}{6}$.

Аналогично $p_{0,3}=\frac{8}{216}=\frac{1}{27}$, так как выпасть могут только цифры 1 и 3 в любых комбинациях. Здесь $m=\overline{A}_2^3=2^3=8$.

Остальные вероятности приведены в табл. 3 совместного закона распределения СВ (X,Y).

Таблица 3

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{27}$
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$
2	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{36}$
3	0	0	0	$\frac{1}{216}$

Составим законы распределения компонент:

X	0	1	2	3
p	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Y	0	1	2	3
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Проверим условие независимости СВ (31):

$$p\left(X=x_i,Y=y_j\right)=p\left(X=x_i\right)p\left(Y=y_j\right).$$

$$p(X=0,Y=0)=\frac{1}{8}\neq\frac{125}{216\cdot 8}=p(X=0)p(Y=0).$$

Итак, СВ(X,Y) зависимы.

ЗАДАЧА 15. Задан закон распределения дискретной системы СВ(X, Y):

$X \backslash Y$	-1	0	1	2
-3	0,01	0,1	0,05	0,1
-1	0,03	0,09	0,06	C
1	0,06	0,2	0,1	0,1

Найти:

а) число C;

б) безусловные законы распределения СВ X, Y;

в) условные законы распределения СВ Y при $X=-3$ и СВ X при $Y=-1$;

г) $M[X]$, $M[Y]$, σ_X, σ_Y;

д) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

е) зависимыми;

ж) коррелированными.

РЕШЕНИЕ. а) Поскольку сумма вероятностей системы СВ равна 1, то

$$C = 1-0,01-0,1-0,05-0,1-0,03-0,09-0,06-0,06-0,2-0,1-0,1 = 0,1.$$

б) Составим безусловные законы распределения СВ X и Y. СВ X может принимать значения:

$X=-3$ с вероятностью $p_1=0,01+0,1+0,05+0,1=0,26$;

$X=-1$ с вероятностью $p_2=0,03+0,09+0,06+0,1=0,28$;

$X=1$ с вероятностью $p_3=0,06+0,2+0,1+0,1=0,46$.

Аналогично вычислим вероятности, с которыми СВ Y примет значения –1; 0; 1; 2.

Законы распределения имеют вид:

X	–3	–1	1
p	0,26	0,28	0,46

Y	–1	0	1	2
p	0,1	0,39	0,21	0,3

в) Согласно формулам (29) и (30) получим условные законы распределения:

$$P(X = x_i \big| Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}, i = 1,\dots,n; \; j = 1,\dots,m;$$

$$P(Y = y_j \big| X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)}, j = 1,\dots,m; \; i = 1,\dots,n.$$

X	-3	-1	1
$p_{Y=-1}$	$\frac{0,01}{0,1}=0,1$	$\frac{0,03}{0,1}=0,3$	$\frac{0,06}{0,1}=0,6$

Y	-1	0	1	2
$p_{X=-3}$	$\frac{0,01}{0,26}=\frac{1}{26}$	$\frac{0,1}{0,26}=\frac{10}{26}$	$\frac{0,05}{0,26}=\frac{5}{26}$	$\frac{0,1}{0,26}=\frac{10}{26}$

г) Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение по формулам (18), (34), (35), (38), (39):

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i,\ M[Y]=\sum_{j=1}^{m}y_j p_j,$$

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i-M^2[X],\ D[Y]=\sum_{j=1}^{m}y_j^2 p_j-M^2[Y].$$

$$M[X]=-0,6,\ M[Y]=0,71;\ D[X]=2,72;D[Y]=1,0059\approx 1,$$

$$\sigma_X=\sqrt{D[X]}\approx 1,65,\ \sigma_Y=\sqrt{D[Y]}\approx 1.$$

д) Вычислим математическое ожидание $M[XY]$ по формуле (43):

$$M[XY]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j p_{ij}=(-3)\cdot 0,01\cdot(-1)+(-3)\cdot 0,05\cdot 1+(-3)\cdot 0,1\cdot 2+$$
$$+(-1)\cdot 0,03\cdot(-1)+(-1)\cdot 0,03\cdot(-1)+(-1)\cdot 0,06\cdot 1+(-1)\cdot 0,1\cdot 2+1\cdot 0,06\cdot(-1)+$$
$$+1\cdot 0,1\cdot 1+1\cdot 0,1\cdot 2=-0,71;$$

Ковариация по формуле (42) равна

$$K_{XY}=M[XY]-M[X]\cdot M[Y]=-0,71-(-0,6)\cdot 0,71=-0,284.$$

Коэффициент корреляции вычислим согласно (45):

$$r_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{-0,284}{1,65\cdot 1}\approx -0,17.$$

е) Так как законы распределения безусловные и условные не совпадают, то СВ X и Y – зависимы.

ж) Поскольку коэффициент корреляции $r_{XY} \neq 0$, то СВ X и Y – коррелированы. Так как значение коэффициента корреляции $r_{XY} < 0$, то связь между СВ X и Y – обратная, т. е. Y с ростом X убывает.

ЗАДАЧА 16. Задана плотность совместного распределения $f(x,y)$ непрерывной системы СВ (X, Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} A\left(2x+y\right), \text{ при } & x+y \le 2,\ x \ge -1,\ y \ge 2, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр A;

б) плотности распределения $f_X(x), f_Y(y)$ составляющих системы;

в) $M[X], M[Y], \sigma_X, \sigma_Y$;

г) K_{XY}, r_{XY}.

Установить, являются ли СВ X и Y:

д) зависимыми;

е) коррелированными.

РЕШЕНИЕ. На рис. 18 представлена заданная область.

а) Найдем A из основного свойства двумерной плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x,y\right)dx\,dy = 1.$$

$$A\int_{-1}^{0} dx \int_{2}^{2-x} \left(2x+y\right)dy = A\int_{-1}^{0} \frac{(2x+y)^2}{2}\Big|_{2}^{2-x} dx =$$

$$= -\frac{A}{2}\int_{-1}^{0} (3x^2+4x)dx = \frac{A}{2} = 1.\ \ A = 2.$$

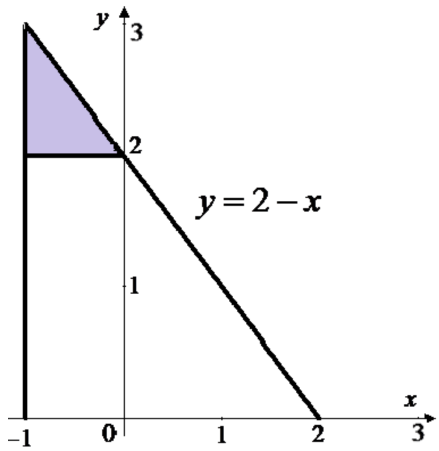


Рис. 18. Область
$x+y \le 2,\ \ x \ge -1,\ \ y \ge 2$

б) Плотности распределения $f_X(x), f_Y(y)$ составляющих систем вычисляются по формулам (27) и (28). Интегралы могут быть вычислены непосредственно или, например, с помощью любых онлайн-программ:

$$f_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=2\int\limits_{2}^{2-x}(2x+y)dy=(2x+y)^2\Big|_{2}^{2-x}=-3x^2-4x,x\in[-1,0].$$

$$f_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=2\int\limits_{-1}^{2-y}(2x+y)dx=6-2y,y\in[2;3].$$

Итак, $f_X(x)=\begin{cases}-3x^2-4x, & x\in[-1,0];\\ 0, & x\notin[-1,0],\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}6-2y, & y\in[2,3];\\ 0, & y\notin[2,3].\end{cases}$

в) Найдем числовые характеристики компонент по формулам (36) и (37):

$$M[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)dxdy=2\int\limits_{-1}^{0}xdx\int\limits_{2}^{2-x}(2x+y)dy=-\frac{7}{12}.$$

$$M[Y]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y f(x,y)dxdy=2\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{2}^{2-x}y(2x+y)dy=\frac{7}{3}.$$

Можно найти $M[X]$ и $M[Y]$ иначе:

$$M[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx=-\int\limits_{-1}^{0}(3x^3+4x^2)dx=-\frac{7}{12}.$$

$$M[Y]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dy=\int\limits_{2}^{3}(6y-2y^2)dy=\frac{7}{3}.$$

Найдем дисперсии и средние квадратические отклонения по формулам (18), (40) и (41):

$$D[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,y)dxdy-(M[X])^2=2\int\limits_{-1}^{0}x^2dx\int\limits_{2}^{2-x}(2x+y)dy-\left(-\frac{7}{12}\right)^2=\frac{43}{720};$$

$$D[Y]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x,y)dxdy-(M[Y])^2=2\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{2}^{2-x}(2x+y)dy-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{1}{18};$$

$$\sigma_X=\sqrt{D[X]}=\sqrt{\frac{43}{720}}=\frac{\sqrt{215}}{60};\ \sigma_Y=\sqrt{D[Y]}=\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

г) Найдем ковариацию по формуле (44):

$$K_{XY}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xy f(x,y)dxdy-M[X]M[Y]=2\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{2}^{2-x}xy(2x+y)dxdy-\left(-\frac{7}{12}\right)\left(\frac{7}{3}\right)=$$

$$=-\frac{7}{5}+\frac{49}{36}=-\frac{7}{180}\approx-0,039.$$

д) Проверим, зависимы или нет СВ X и Y. По условию независимости СВ $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ заключаем, что СВ X и Y зависимы.

Зависимость СВ X и Y можно проверить иначе. Для этого найдем условные плотности распределения непрерывных СВ по формулам (32) и (33).

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)};\ f(y|x)=\frac{2(2x+y)}{-3x^2-4x},\ \text{при}\, x\in[-1,0),$$

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(\text{y})};\ f(x|y)=\frac{2(2x+y)}{6-2y},\ \text{при}\ y\in[2,3).$$

Очевидно, что условные и безусловные законы распределения не совпадают, поэтому СВ X и Y зависимы.

е) Коэффициент корреляции вычислим по формуле (45):

$$r_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}\approx\frac{-0,039\cdot 60\cdot 6}{\sqrt{215}\cdot\sqrt{2}}\approx -0,68.$$

Поскольку коэффициент корреляции не равен нулю, то СВ (X,Y) коррелированы и связь между СВ X и Y – обратная, так как $r_{XY}<0$.

ЗАДАЧА 17. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,93, утверждать, что частота события будет отличаться от вероятности появления этого события, равной 0,3, менее чем на 0,2? (Использовать неравенство Чебышева.)

РЕШЕНИЕ. Подставим заданные значения $p=0,3$; $q=0,7$; $\varepsilon=0,2$ в неравенство Чебышева (46):

$$p\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2},\ p\left(\left|\frac{m}{n}-0,3\right|<0,2\right)\geq 1-\frac{0,21}{n\cdot 0,04}\geq 0,93,$$

$$\frac{0,21}{0,04n}\leq 0,07,\ n\geq 75.$$

Таким образом, нужно провести не менее 75 опытов.

ГЛАВА 4. ЭКСПЕРИМЕНТЫ

4.1. Статистическое моделирование

Статистическое моделирование (СМ) – это основанный на законах теории вероятностей метод решения вероятностных и детерминированных задач, использующий случайные числа и способность современных компьютеров выполнять за короткие промежутки времени огромное количество вычислительных операций. В данном учебном пособии СМ применяется не только для решения задач, но и как средство реализации случайных объектов – предмета теории вероятностей – с целью их наблюдения и экспериментального изучения[1]. Широко распространенным синонимом термина «статистическое моделирование» является термин «метод Монте-Карло» [8].

В качестве «первоэлемента», из которого строятся все прочие случайные объекты, воплощаемые в СМ, используется *базовая случайная величина*. Она реализуется (генерируется) специальными программами, входящими в состав практически всех современных языков программирования. Такие программы обычно называют датчиками стандартных случайных чисел.

4.2. Базовая случайная величина

Базовая случайная величина (БСВ) в СМ – это непрерывная СВ, равномерно распределенная в промежутке между 0 и 1. Обозначая БСВ через U, её плотность вероятностей $f(u)$ можно описать формулой

$$f(u) = 1, \ (0 \le u \le 1). \tag{48}$$

При $u < 0$ и $u > 1$ плотность $f(u)$ равна нулю.

Закон распределения БСВ и ее характеристики представлены в п. 1.3.3 (см. равномерный закон, где случаю БСВ соответствуют параметры $a = 0$, $b = 1$). В частности, математическое ожидание $\mathrm{M}[U] = 1/2$ и дисперсия $\mathrm{D}[U] = 1/12$.

[1] Историей науки многократно подтверждено, что наблюдение занимает в процессе математического творчества важное место и играет большую роль.

4.3. Первые опыты

Откройте чистый лист Excel. Наберите в ячейке A1 формулу =СЛЧИС() и введите ее (нажав клавишу Enter). В этой ячейке появится число. Нажмите несколько раз клавишу F9. После каждого нажатия число в ячейке будет изменяться случайным образом, оставаясь между 0 и 1. Тем самым будет выполнен ряд *испытаний*, исходами которых являются *реализации* БСВ U.

В терминах геометрической вероятности эти опыты можно интерпретировать как выбрасывания случайной точки на отрезок [0, 1]. Не закрывайте файл.

Обсуждение. В Excel функция СЛЧИС() представляет собой датчик стандартных случайных чисел. Он «материализует» (реализует, моделирует, воспроизводит) БСВ U с высоким качеством, гарантированным современными компьютерными науками. Качество любого датчика стандартных случайных чисел определяется точностью выполнения двух требований:

– реализуемая СВ должна быть равномерно распределена на отрезке [0, 1],

– ее последовательные реализации должны быть независимыми СВ (не только попарно, но и в совокупности).

Точное выполнение этих требований всесторонне проверяется с помощью специальных статистических тестов [9].

4.4. Пробы качества датчика

4.4.1. Расчет выборочных числовых характеристик

Получаемая в ходе испытаний последовательность $X_1, X_2, ..., X_n$ независимых реализаций СВ X называется выборкой. По выборке можно рассчитывать числовые характеристики СВ (они называются *выборочными характеристиками*, или *статистическими оценками*). Например, выборочное математическое ожидание рассчитывается как среднее арифметическое элементов X_i выборки. Выборочные характеристики являются приближенными оценками точных значений соответствующих характеристик СВ (определяемых по ее закону распределения).

Сгенерируем в Excel выборку, содержащую 10 тыс. реализаций СВ, воспроизводимой функцией СЛЧИС(), и рассчитаем статистические оценки математического ожидания и дисперсии этой СВ.

Скопируйте ячейку A1, содержащую формулу =СЛЧИС(), на диапазон ячеек A1:A10000. В нем появится нужная нам выборка. Введите в ячейку C1 формулу =СРЗНАЧ(A1:A10000), в ячейку D1 – формулу =ДИСПР(A1:A10000). В результате в ячейках C1 и D1 появятся рассчитанные по выборке A1:A10000 статистические оценки математического ожидания и, соответственно, дисперсии СВ, реализуемой функцией СЛЧИС().

Закон больших чисел (47) и его простые следствия гарантируют, что с ростом объема n нашей выборки статистические оценки математического ожидания и дисперсии сходятся к соответствующим точным значениям. Поскольку объем n = 10000 представляется нам (пока субъективно) достаточно большим, мы предполагаем, что полученные оценки достаточно точны. Таким образом, мы можем судить о качестве функции СЛЧИС() как датчика БСВ по тому, имеет ли реализуемая СВ требуемое математическое ожидание 1/2 = 0,5 и требуемую дисперсию 1/12 = 0,08333... .

Приближенные оценки, полученные в ячейках C1 и D1, несколько отличаются от соответствующих им точных значений. Нажимая на клавишу F9 для пересчета листа, можно видеть, что эти оценки колеблются в окрестностях соответствующих им точных значений.

Чтобы лучше воспринимать погрешности, вычислите их в процентах. Для этого под оценкой математического ожидания (в ячейку C2) введите формулу =(C1-0,5)/0,5, а в ячейку D2 – формулу =(D1-1/12)/(1/12). Формат ячеек C2 и D2 определите как процентный и сократите в нем число выводимых цифр до одной. Теперь при пересчетах листа после нажатий клавиши F9 легко увидеть, что погрешности оценок колеблются в основном в пределах ±2 %. Интервалы колебания оценок накрывают своими серединами точные значения соответствующих числовых характеристик.

Выполненная проверка косвенно подтверждает, что функция СЛЧИС() действительно реализует БСВ. Сохраните файл, но не закрывайте.

Обсуждение. Если имеется выборка $X_1, X_2, ..., X_n$, состоящая из n независимых реализаций некоторой СВ X, то статистическую оценку $\hat{M}$ математического ожидания M[X] рассчитывают по формуле

$$\hat{M} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \,. \tag{49}$$

Эту оценку и вычисляет использованная нами функция СРЗНАЧ. Из формулы (49) вытекает, что оценка $\hat{M}$ как функция от нескольких СВ сама является СВ. Это мы видели и в ходе выполнения опыта, наблюдая за колебаниями величины $\hat{M}$ при пересчетах листа Excel.

Для вычисления статистической оценки дисперсии могут использоваться разные формулы, близкие, но не эквивалентные. В Excel имеется несколько разных функций, использующих эти разные формулы. Одна из наиболее простых формул определяет статистическую оценку $\hat{D}$ дисперсии D[X] следующим образом:

$$\hat{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \hat{M}^2 . \qquad (50)$$

Структура этой формулы соответствует правилу «дисперсия равна матожиданию квадрата минус квадрат матожидания» (см. п. 1.3.2, четвертое свойство дисперсии).

4.4.2. Двумерная визуальная проверка равномерности

На этом же листе скопируйте диапазон ячеек A1:A10000 на диапазон B1:B10000. Полученные пары ячеек (A1, B1), (A2, B2) и т. д. будем рассматривать как координаты (X, Y) случайных точек плоскости. Выделите диапазон A1:B10000 и постройте по нему диаграмму типа «точечная». На этой диаграмме будет видно, что случайные точки равномерно распределены в квадрате $D:\{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$. Заметим, что равномерное распределение случайных точек не нужно путать с детерминированным *регулярным расположением*. При нажатиях клавиши F9 можно видеть, как точки на диаграмме «пересыпаются» внутри квадрата, не отдавая предпочтения одним его участкам перед другими. Если при каком-либо нажатии F9 возникают случайные сгущения точек в одних местах квадрата, то при другом нажатии сгущения происходят в других местах.

В заключение вставьте перед верхней строкой листа новую строку, добавьте заголовки столбцов (рис. 19) и сохраните файл.

4.4.3. Проверка независимости

Простые проверки независимости реализаций БСВ можно выполнять путем вычисления статистических оценок коэффициентов корреляции. Проверим, например, коррелируют ли СВ X и Y, реализациями которых являются пары (X_i, Y_i) чисел, расположенные в строках диапазона A1:B10000 (см. рис. 19).

Исходя из формул (45) и (42), коэффициент корреляции r_{XY} можно выразить в виде

$$r_{XY} = \frac{\mathrm{M}[XY] - \mathrm{M}[X]M[Y]}{\sqrt{\mathrm{D}[X]\mathrm{D}[Y]}}.$$

Если в правой части этого равенства точные значения числовых характеристик СВ мы заменим соответствующими приближенными статистическими оценками, то получим приближенную статистическую оценку $\hat{r}_{XY}$ коэффициента r_{XY}:

$$\hat{r}_{XY} = \frac{\hat{\mathrm{M}}[XY] - \hat{\mathrm{M}}[X]\hat{M}[Y]}{\sqrt{\hat{\mathrm{D}}[X]\hat{\mathrm{D}}[Y]}}, \tag{51}$$

где в соответствии с формулами (49) и (50)

$$\hat{\mathrm{M}}[XY] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i, \tag{52}$$

$$\hat{\mathrm{M}}[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \hat{\mathrm{M}}[Y] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \tag{53}$$

$$\hat{\mathrm{D}}[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \hat{\mathrm{M}}^2[X], \qquad \hat{\mathrm{D}}[Y] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \hat{\mathrm{M}}^2[Y]. \tag{54}$$

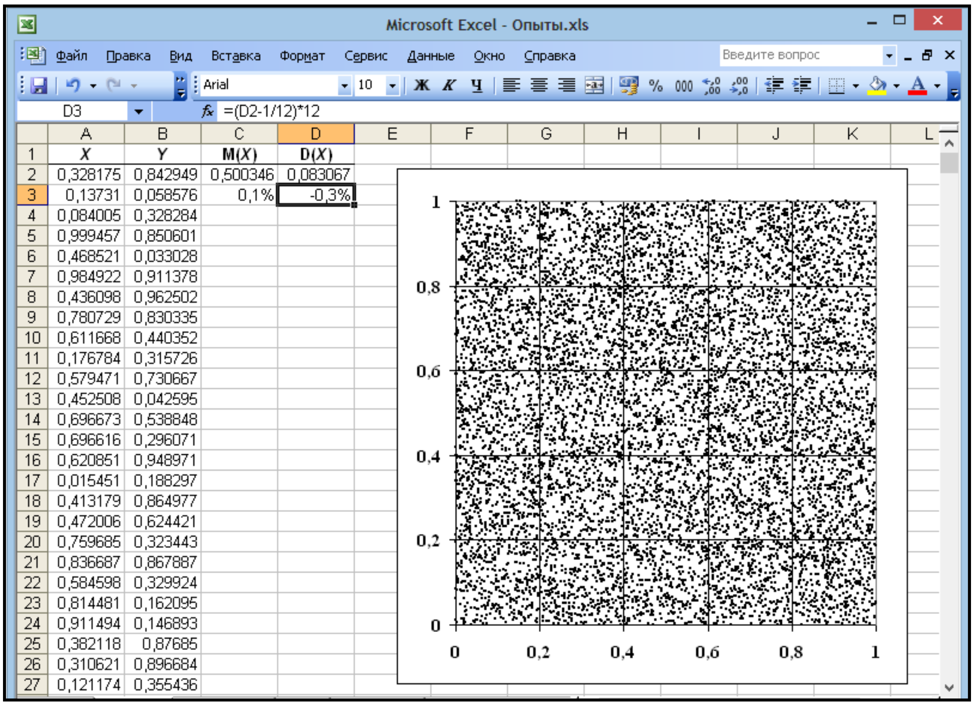


Рис. 19. Визуальная двумерная проверка равномерности

Используем уже имеющийся лист сохраненного файла (представленный на рис. 19) и рассчитаем статистическую оценку $\hat{r}_{XY}$ по формуле (51). Поскольку оценки математического ожидания и дисперсии СВ X на листе уже имеются, добавьте лишь оценки числовых характеристик СВ Y (формулы, для вычисления которых должны ссылаться на диапазон B2:B10001), а также погрешности этих оценок в процентах (рис. 20). Затем с учетом адресов ячеек, в которых располагаются используемые данные, введите формулу (51) для вычисления $\hat{r}_{XY}$:

=(СУММПРОИЗВ(A2:A10001;B2:B10001)/10000-C2*C6)/КОРЕНЬ(D2*D6).

Выполняя теперь серию экспериментов (нажатиями клавиши F9), можно видеть, что оценка коэффициента корреляции колеблется в окрестности нуля (рис. 20), принимая малые положительные и отрицательные значения. Это косвенно подтверждает, что СВ X и Y действительно независимы, т. е. независимы реализации БСВ, генерируемые функцией =СЛЧИС(). Сохраните файл.

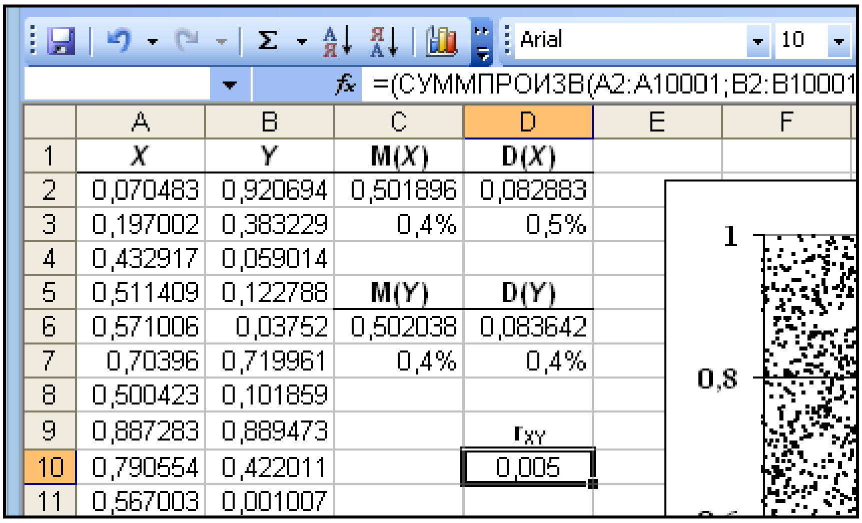


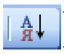
Рис. 20. Расчет коэффициента корреляции

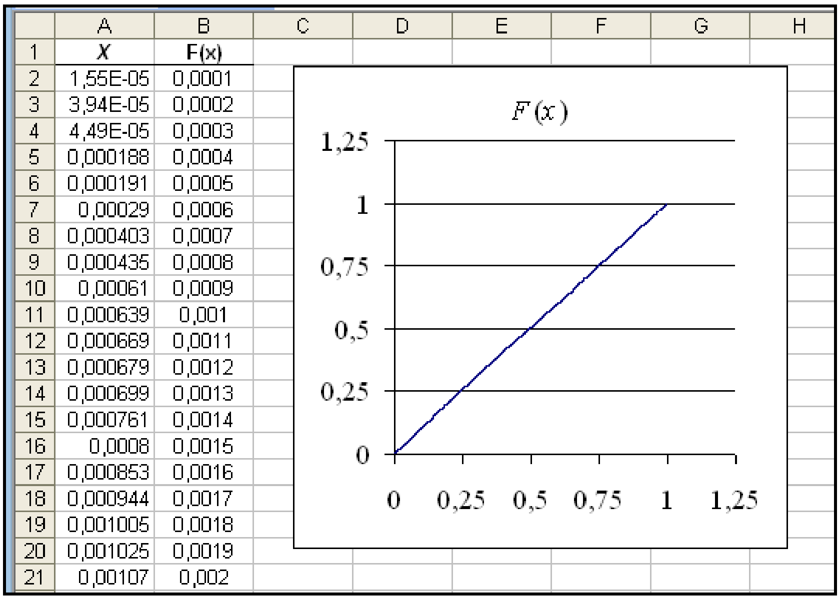
Обсуждение. 1. Если бы между X и Y имелась заметная линейная связь, то оценка коэффициента корреляции заметно отклонялась бы от нуля. Тогда и точки на диаграмме (см. рис. 19) сгущались бы в окрестностях соответствующей прямой. Если бы между X и Y существовала нелинейная связь (которую коэффициент корреляции может не диагностировать), то точки сгущались бы в окрестностях соответствующей кривой.

2. Расчеты можно упростить, используя функцию КОРРЕЛ.

4.4.4. Построение эмпирической функции распределения

По выборке X_1, X_2, ..., X_n независимых реализаций любой СВ X можно приближенно определить и ее функцию распределения вероятностей $F(X)$.

Постройте на новом листе Excel в колонке A выборку 10 тыс. значений СВ, реализуемой функцией СЛЧИС(). Чтобы их отсортировать без последующего автоматического пересчета, скопируйте всю их колонку и вставьте ее на место, но уже специальной вставкой, как значения. Выделите диапазон этих значений и отсортируйте в порядке возрастания (нажав в меню кнопку ). В результате случайные числа расположатся в колонке в таком же порядке, в каком соответствующие им точки располагаются на числовой прямой x (рис. 21).



	A	B
1	X	F(x)
2	1,55E-05	0,0001
3	3,94E-05	0,0002
4	4,49E-05	0,0003
5	0,000188	0,0004
6	0,000191	0,0005
7	0,00029	0,0006
8	0,000403	0,0007
9	0,000435	0,0008
10	0,00061	0,0009
11	0,000639	0,001
12	0,000669	0,0011
13	0,000679	0,0012
14	0,000699	0,0013
15	0,000761	0,0014
16	0,0008	0,0015
17	0,000853	0,0016
18	0,000944	0,0017
19	0,001005	0,0018
20	0,001025	0,0019
21	0,00107	0,002

Рис. 21. Эмпирическая функция распределения БСВ

Рассматривая их как возможные значения некоторой дискретной СВ, встретившиеся каждое один раз из 10 тыс. опытов, т. е. как имеющие вероятность 0,0001 каждое, можно построить график функции распределения этой дискретной СВ. При x, равном первому из этих значений (плюс ноль), функция равна 0,0001; при x, равном второму значению (плюс ноль), она скачком возрастает на 0,0001 и т. д. (см. главу 1). Чтобы построить график этой функции, сгенерируйте в колонке B1 соответствующую арифметическую прогрессию (см. рис. 21), выделите обе колонки и постройте по ним диаграмму типа «точечная» (со значениями, соединенными отрезками). Полученная в колонках A и B в табличном виде функция называется эмпирической функцией распределения вероятностей СВ X. Полученный на листе Excel график несомненно свидетельствует о равномерном распределении СВ X (сравните его с рис. 5 при $a = 0$, $b = 1$).

С ростом объема n выборки эмпирическая функция распределения сходится к точной теоретической функции распределения вероятностей СВ X.

Обсуждение. Естественно, серьезные статистические тесты, которым подвергаются датчики стандартных случайных чисел их профессиональными разработчиками, намного сложнее, глубже и обширнее выполненных нами проверок. Тем не менее, эти проверки позволяют нам лучше увидеть и понять свойства БСВ, которая будет использоваться в дальнейших экспериментах. Кроме того, в результате этих проверок значительно возрастает наша субъективная уверенность в том, что функции СЛЧИС() как датчику стандартных случайных чисел вполне можно доверять.

В дальнейшем будем считать, что СЛЧИС() является идеальным генератором БСВ, точность которого ограничена конечными пределами возможностей компьютера. Например, значения БСВ генерируются в Excel с точностью 15 десятичных цифр после запятой. Это значит, что мы можем считать реализованную БСВ непрерывной СВ только до тех пор, пока не столкнемся с теми особыми задачами, при решении которых шаг 10^{-15} между ее ближайшими значениями окажется слишком большим. В таких случаях приходится учитывать дискретность генерируемой БСВ [10]. В рамках данного пособия мы с такими задачами не столкнемся.

Независимость генерируемых реализаций БСВ также обеспечивается с ограниченной точностью. Чаще всего это обусловлено тем, что значения БСВ генерируются по определенному алгоритму, зная который, можно наперед предсказать все ее реализации (т. е. компьютерные БСВ являются, как правило, не случайными, а псевдослучайными величинами). Однако это отличие компьютерных БСВ от идеальных играет еще меньшую роль (при использовании современных качественных датчиков), чем ограниченная длина разрядной сетки.

Итак, далее будем исходить из того, что при всяком обращении к функции СЛЧИС() выдается действительно независимая реализация действительно непрерывной СВ U, имеющей действительно равномерное распределение на отрезке [0, 1].

4.5. Реализация непрерывных СВ с заданными распределениями

4.5.1. Метод обращения

Реализовать СВ с нужным распределением вероятностей можно путем соответствующего преобразования БСВ U. Например, если умножить U на константу $(b - a) > 0$, то отрезок [0, 1] реализуемых значений СВ «растянется» в $(b - a)$ раз, и если затем прибавить константу a, то начало отрезка сместится вправо на a. Закон распределения полученной СВ $X = a + (b - a)U$ останется равномерным, а отрезком возможных значений станет отрезок $[a, b]$. Так мы можем реализовать СВ с равномерным распределением на любом отрезке.

Универсальным методом реализации непрерывной СВ X с любой заданной функцией распределения вероятностей $F(x)$ является метод обращения, состоящий в применении для реализации СВ X следующего преобразования:

$$X = F^{-1}(U), \tag{55}$$

где F^{-1} – функция, получаемая обращением заданной функции F. Доказательство метода обращения можно найти в [9].

4.5.2. Реализация методом обращения экспоненциальной СВ

Найдем, например, преобразование БСВ U, дающее экспоненциально распределенную СВ X, которая (см. п. 1.3.3) имеет функцию распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0,\ \lambda > 0. \tag{56}$$

Чтобы упростить переход к обратной функции F^{-1}, запишем вначале равенство (55) в виде уравнения $U = F(X)$ (подставляя заданную функцию F), а затем решим его относительно X. Поступая таким образом, получаем:

$$U = 1 - e^{-\lambda X},$$
$$e^{-\lambda X} = 1 - U,$$
$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - U).$$

Последнее выражение представляет собой преобразование (55), записанное для экспоненциальной функции распределения F. Его можно упростить, замечая, что СВ $(1 - U)$ равномерно распределена на отрезке [0, 1] и, следовательно, эквивалентна БСВ U по распределению. Поэтому вместо него можно использовать преобразование

$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln U\,. \tag{57}$$

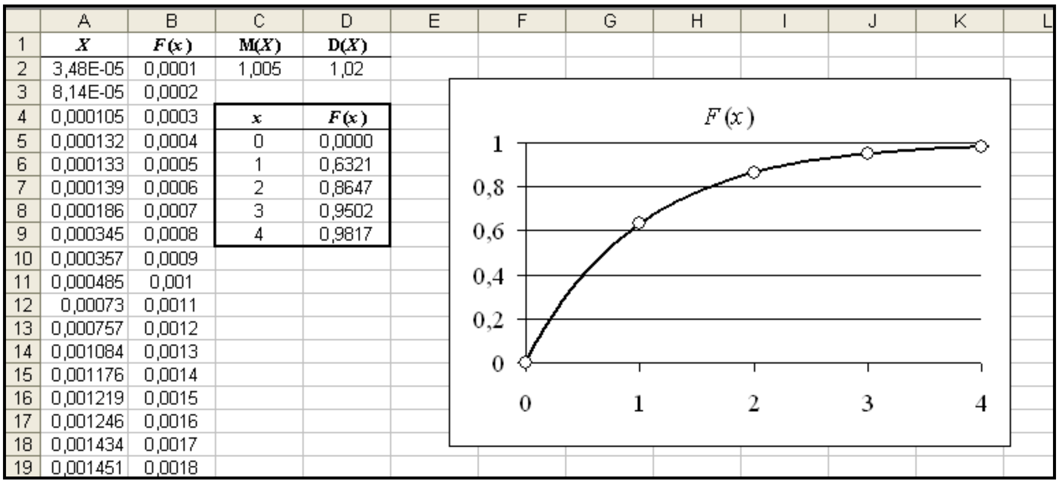
Реализуем, например, экспоненциально распределенную СВ X с параметром $\lambda = 1$. Она имеет математическое ожидание $\mathrm{M}[X] = 1/\lambda = 1$ и, соответственно, дисперсию $\mathrm{D}[X] = 1/\lambda^2 = 1$ (см. п. 1.3.3).

Откройте чистый лист Excel. В ячейку A2 введите формулу (57) (с $\lambda = 1$) в виде =-LN(СЛЧИС()) и скопируйте ячейку на диапазон A2:A10001. Тем самым сформируется выборка из 10 тыс. реализаций экспоненциальной СВ X.

Обработаем эту выборку, чтобы убедиться в том, что X имеет нужное нам экспоненциальное распределение.

В ячейках C2 и D2 рассчитайте выборочные математическое ожидание и дисперсию. Добавьте заголовки (рис. 22). Скопируйте диапазон A2:A10001 и вставьте на место как значения. Отсортируйте его по возрастанию. В колонке B сформируйте значения эмпирической функции распределения. Постройте ее график, как строили в п. 4.4.4 для БСВ. Протабулируйте теоретическую функцию распределения: вычислите по формуле (56) ее значения в точках 0, 1, ..., 4. Добавьте на диаграмму ее график маркерами (опция диаграммы: «Исходные данные/Ряд/Добавить»).

Судя по полученной диаграмме, эмпирическая функция распределения (сплошная линия) достаточно хорошо соответствует теоретической функции распределения вероятностей (круглые маркеры). Тем самым мы убеждаемся, что преобразование (57) действительно реализует экспоненциальную СВ.



	A	B	C	D
1	X	$F(x)$	M(X)	D(X)
2	3,48E-05	0,0001	1,005	1,02
3	8,14E-05	0,0002		
4	0,000105	0,0003	x	$F(x)$
5	0,000132	0,0004	0	0,0000
6	0,000133	0,0005	1	0,6321
7	0,000139	0,0006	2	0,8647
8	0,000186	0,0007	3	0,9502
9	0,000345	0,0008	4	0,9817
10	0,000357	0,0009		
11	0,000485	0,001		
12	0,00073	0,0011		
13	0,000757	0,0012		
14	0,001084	0,0013		
15	0,001176	0,0014		
16	0,001219	0,0015		
17	0,001246	0,0016		
18	0,001434	0,0017		
19	0,001451	0,0018		

Рис. 22. Реализация экспоненциальной СВ с параметром $\lambda = 1$:
сплошная линия – эмпирическая функция распределения,
маркеры – значения теоретической функции распределения в точках 0, 1, ..., 4

4.5.3. Реализация методом обращения стандартной нормальной СВ

Стандартной нормальной СВ называют СВ, имеющую нормальное распределение вероятностей (см. п. 1.3.3) с математическим ожиданием $a = 0$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 1$.

Плотность вероятностей $f(x)$ стандартной нормальной СВ является функцией $\varphi(x)$ Гаусса

$$f(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

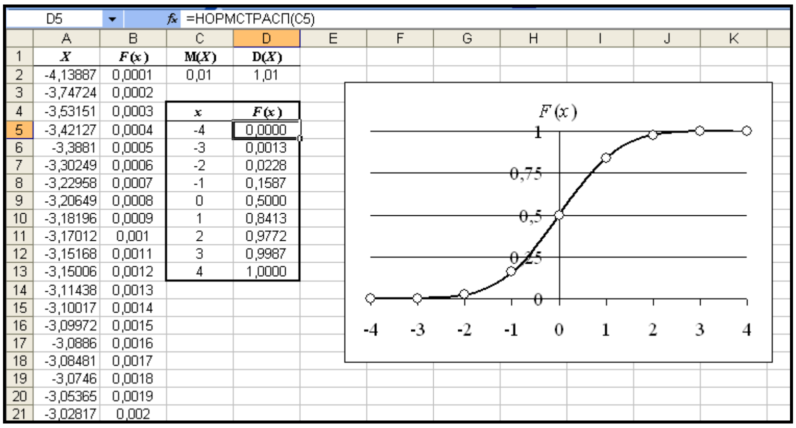
Но *функция распределения* вероятностей $F(x)$ стандартной нормальной СВ не выражается в элементарных функциях в замкнутом виде (т. е. в виде обычной формулы), поэтому для ее вычисления применяются численные методы.

В Excel для вычисления функции F стандартного нормального распределения и обратной функции F^{-1} используются встроенные функции НОРМСТРАСП и НОРМСТОБР соответственно.

Реализуем методом обращения (по аналогии с экспоненциальной СВ) стандартную нормальную СВ.

Для этого на новом листе Excel повторите действия, выполненные при реализации экспоненциальной СВ (см. п. 4.5.2), но начните их вводом в ячейку А2 не формулы =-LN(СЛЧИС()), реализующей метод обращения для экспоненциального распределения, а формулы =НОРМСТОБР(СЛЧИС()), реализующей метод обращения для стандартного нормального распределения вероятностей. Кроме того, при вычислении значений *теоретической* функции распределения используйте встроенную функцию НОРМСТРАСП (см. на рис. 23 формулу в ячейке D5).

В результате будет получен лист, имеющий приблизительно такой вид, как на рис. 23. Выводы сделайте сами.



	A	B	C	D
1	X	F(x)	M(X)	D(X)
2	-4,13887	0,0001	0,01	1,01
3	-3,74724	0,0002		
4	-3,53151	0,0003	x	F(x)
5	-3,42127	0,0004	-4	0,0000
6	-3,3881	0,0005	-3	0,0013
7	-3,30249	0,0006	-2	0,0228
8	-3,22958	0,0007	-1	0,1587
9	-3,20649	0,0008	0	0,5000
10	-3,18196	0,0009	1	0,8413
11	-3,17012	0,001	2	0,9772
12	-3,15168	0,0011	3	0,9987
13	-3,15006	0,0012	4	1,0000
14	-3,11438	0,0013		
15	-3,10017	0,0014		
16	-3,09972	0,0015		
17	-3,0886	0,0016		
18	-3,08481	0,0017		
19	-3,0746	0,0018		
20	-3,05365	0,0019		
21	-3,02817	0,002		

Рис. 23. Реализация стандартной нормальной СВ

Для реализации нормальной СВ Y с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2 можно использовать следующее линейное преобразование стандартной нормальной СВ X:

$$Y = \sigma X + a.$$

4.5.4. Реализация непрерывной системы СВ

Реализовать непрерывную систему СВ (X, Y) можно путем использования безусловной функции $F_X(x)$ распределения СВ X и условной функции $F_Y(y|x)$ распределения СВ Y. Вначале по $F_X(x)$ методом обращения реализуется СВ X, затем при x, равном полученному значению X, по функции $F_Y(y|x) = F_Y(y|X)$ методом обращения реализуется СВ Y.

4.6. Реализация дискретных СВ

4.6.1. Общий метод

Пусть дискретная СВ X задана возможными значениями $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и их вероятностями $p_1, \ldots, p_n$ соответственно ($p_1 + \ldots + p_n = 1$). Для реализации дискретных СВ непосредственно применять метод обращения нельзя, поскольку функции распределения дискретных СВ не имеют обратных функций. В общем случае дискретная СВ реализуется на основе БСВ U следующим образом.

Отрезок [0, 1] возможных значений U разбивается на n промежутков с длинами $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Это всегда возможно, поскольку суммарная длина промежутков $p_1 + \ldots + p_n = 1$. Каждому промежутку сопоставляется соответствующее ему по вероятности значение из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Реализуется БСВ U, определяется промежуток, в который она попала, и выдается сопоставленное этому промежутку значение x_i.

В разных частных случаях такое преобразование U в X может осуществляться по-разному.

4.6.2. Частные случаи

1. Разыграть СВ X, принимающую значения 0, 1, ..., $n-1$ с вероятностями, равными $1/n$, можно путем следующего преобразования БСВ U:

$$X = \lfloor nU \rfloor, \tag{58}$$

где пара скобок $\lfloor\ \rfloor$ означает взятие целой части.

2. Если нужно разыграть в Excel бернуллиеву СВ X, которая, например, с вероятностью 0,2 равна 1 и с вероятностью 0,8 равна 0, то для этого можно использовать формулу =(СЛЧИС()<0,2)+0 (прибавление нуля к логическому значению ИСТИНА/ЛОЖЬ преобразует его в арифметическое значение 1/0).

3. Если разыгрывается дискретная СВ с бесконечным множеством возможных значений, то нужно организовывать цикл с перебором промежутков для определения того, в который попало значение БСВ [9]. В Excel циклы организовывать сложно, поэтому приходится ограничивать число просматриваемых промежутков (и при каждой реализации просматривать их все), что может приводить к неточной реализации таких СВ.

4. Дискретную систему СВ (X, Y) с множеством возможных значений (x_i, y_j) можно реализовать таким же способом, как и простую дискретную СВ. Только промежутки отрезка [0, 1] должны иметь длины p_{ij} = P[(X,Y) = = (x_i, y_j)] и этим отрезкам должны сопоставляться пары значений (x_i, y_j).

4.7. Погрешности оценок математического ожидания

4.7.1. Вывод формулы для расчета погрешности

Пусть по выборке $X_1, X_2, ..., X_n$ независимых реализаций некоторой СВ X рассчитана оценка математического ожидания $\hat{M} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Согласно центральной предельной теореме (см. п. 1.4.4) с ростом числа опытов n закон распределения этой оценки сходится к нормальному. Как правило, при СМ число n бывает достаточно велико, чтобы на практике мы могли просто говорить, что оценка $\hat{M}$ имеет нормальное распределение вероятностей.

Пусть M[X] =μ, D[X] = σ_X^2, тогда математическое ожидание и дисперсия оценки $\hat{M}$ составляют

$$\mathrm{M}[\hat{M}] = \mathrm{M}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}[X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}[X] = \mathrm{M}[X] = \mu,$$

$$\mathrm{D}[\hat{M}] = \mathrm{D}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}[X_i] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}[X] = \frac{\mathrm{D}[X]}{n} = \frac{\sigma_X^2}{n}$$

и, следовательно, среднеквадратическое отклонение оценки $\hat{M}$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{D}[\hat{M}]} = \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}. \tag{59}$$

Поскольку СВ $\hat{M}$ имеет нормальное распределение, то почти достоверно, что она отклоняется от своего математического ожидания μ не более чем на 3σ:

$$|\hat{M} - \mu| \leq 3\sigma. \tag{60}$$

В действительности это неравенство выполняется с вероятностью 1 – 0,0027, которая несколько меньше единицы. С учетом соотношения (59) неравенство (60) можно записать следующим образом:

$$|\hat{M} - \mu| \leq \frac{3\sigma_X}{\sqrt{n}}. \tag{61}$$

Положительную величину в правой части неравенства (61) можно рассматривать как модуль *абсолютной погрешности* оценки $\hat{M}$, т. е. как вероятностный аналог обычной абсолютной погрешности $\hat{M} - \mu$.

Неравенство (61) и его достаточно высокая степень достоверности позволяют нам на практике говорить, что *оценка* $\hat{M}$ *отклоняется от M не более чем на три сигмы усредняемой СВ, деленные на корень из числа опытов*.

4.7.2. Пример применения

На рис. 19 по выборке длины n = 10000 была рассчитана оценка 0,500346 математического ожидания БСВ U. Относительная погрешность этой оценки составила 0,1 %. Она рассчитана через известное точное значение M(U) = 0,5 и справедлива только для того эксперимента, результаты которого зафиксированы на рисунке. При нажатиях клавиши F9 в серии экспериментов изменяются как оценка математического ожидания, так и погрешность этой оценки.

Найдем пределы относительной погрешности, используя правило (61).

Если использовать известное нам точное значение 1/12 дисперсии σ_X^2 усредняемой СВ X, то из (61) находим, что абсолютная погрешность оценки

для M[X] не превышает по модулю $3\sqrt{1/12}/\sqrt{10000} \approx 0{,}866/100 \approx 0{,}009$, а относительная, соответственно, не превышает по модулю (0,009/0,5)×
×100 % = 1,8 %.

Когда точные значения дисперсии и/или математического ожидания усредняемой СВ неизвестны, вместо них используют соответствующие выборочные оценки. На рис. 19 выборочная дисперсия равна 0,083067, и при ее подстановке в правую часть формулы (61) получаем практически такие же результаты: абсолютная погрешность оценки для M(X) не превышает по модулю $3\sqrt{0{,}0831}/\sqrt{10000} \approx 0{,}865/100 \approx 0{,}009$, и относительная погрешность, соответственно, не превышает по модулю (0,009/0,500346)·100 % ≈ 1,8 %. Говоря так, мы подразумеваем, что «не превышает» с вероятностью 1 – 0,0027.

В п. 4.4.1 в ходе наблюдения экспериментов, проводившихся на этом листе, также отмечено, что относительные погрешности оценок колеблются в пределах ±2 % (вывод числа процентов был округлен до одной цифры).

4.7.3. Расчет погрешностей оценок вероятностей

1. Пусть выполняется n независимых опытов, в каждом из которых с вероятностью p может произойти событие A, и рассчитывается оценка $\hat{p}$ вероятности p:

$$\hat{p} = \frac{n_A}{n}, \tag{62}$$

где n_A – число опытов, в которых событие A произошло.

Требуется определить абсолютную погрешность $\Delta = \hat{p} - p$ оценки $\hat{p}$.

Пусть СВ X – индикатор события A, равна 1, если это событие произошло, и равна 0 в противном случае. Тогда

$$\mathrm{M}[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p, \tag{63}$$

$$\mathrm{D}[X] = \mathrm{M}[X^2] - \mathrm{M}^2[X] = [1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p)] - p^2 = p - p^2 = p(1-p), \tag{64}$$

$$\sigma_X = \sqrt{p(1-p)}. \tag{65}$$

Из (63) следует, что вероятность p есть математическое ожидание СВ X.

Далее, учитывая, что сумма $X_1 + X_2 + ... + X_n$ реализаций индикатора X есть n_A (согласно определению индикатора), из (62) получаем

$$\hat{p} = \frac{n_A}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \hat{M} ,$$

откуда следует, что оценка $\hat{p}$ вероятности события A есть оценка математического ожидания СВ X. Применяя неравенство (61) к оценке $\hat{M} = \hat{p}$ (при $\mu = p$), заключаем, что абсолютная погрешность Δ удовлетворяет неравенству

$$|\Delta| \le 3\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = 3\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \qquad (66)$$

(с вероятностью 1 – 0,0027). Когда точное значение p неизвестно, в формулу (66) подставляют саму оценку $\hat{p}$.

2. Часто методом СМ рассчитывают вероятности маловероятных, т. е. редких, событий. В этом случае интерес представляет относительная погрешность $\delta = \Delta/p$. Разделив левую и правую части неравенства (66) на p, получаем:

$$|\delta| \le 3\frac{\sqrt{(1-p)}}{\sqrt{np}}. \qquad (67)$$

При малых p здесь $1 - p \approx 1$, поэтому, учитывая что $np = n_{ср}$ есть среднее число появлений события A в n опытах, можно написать:

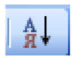
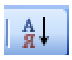
$$|\delta| \le \frac{3}{\sqrt{n_{ср}}}. \qquad (68)$$

Когда точное значение вероятности p неизвестно, вместо p в формулу (67) подставляют оценку $\hat{p}$, а в формулу (68) вместо $n_{ср}$ подставляют число n_A реализаций события A в произведенных опытах. Из формулы (68) видно, что для того, чтобы относительная погрешность была меньше единицы (т. е. меньше 100 %), нужно увеличивать число опытов до тех пор, пока событие A не произойдет хотя бы 10 раз.

4.8. Решение методом СМ задачи 2

4.8.1. Демонстрационный вариант задачи

В демонстрационном варианте задачи 2 (глава 3) требуется найти вероятность p того, что два определенных предмета (карандаш и ручка) окажутся рядом в случайной последовательности из 10 предметов. Для экспериментального решения этой задачи нужно сгенерировать достаточно много таких случайных последовательностей и найти среди них долю $\hat{p}$ тех, в которых произошло интересующее нас событие. Эта доля $\hat{p}$ и будет оценкой искомой вероятности p. При достаточно большом числе опытов, согласно закону больших чисел в форме Бернулли, оценка $\hat{p}$ сходится к p.

Генерацию случайной перестановки в Excel можно выполнить следующим образом. Откройте новый лист Excel, введите формулу =СЛЧИС() и скопируйте ее в колонку из 10 ячеек. Рядом с полученным столбцом случайных чисел введите столбец обозначений **к**, **р**, п1, п2, ..., п8, обозначающий начальный порядок расположения предметов из условий задачи 2. Добавьте к столбцам заголовки. Выделите столбцы вместе с заголовками и нажмите в меню листа пиктограмму сортировки . В результате числа в первой колонке отсортируются (будут переставлены в порядке возрастания) и вместе с ними будут переставлены обозначения предметов во второй колонке. Одновременно случайные числа в первой колонке будут сгенерированы заново, как и в случае любого другого пересчета листа. Можно нажать пиктограмму  достаточно большое число раз и «вручную» подсчитать долю $\hat{p}$ случаев, в которых обозначения **к** и **р** окажутся рядом. Правда, делать это неудобно и долго.

Другой способ состоит в создании (методом копирования) достаточно большого числа таких пар столбцов. Затем их нужно все выделить как один большой диапазон, скопировать его и вставить в самого себя специальной вставкой как значение. Тогда формулы =СЛЧИС() заменятся значениями-константами. После сортировки они не изменятся, а число интересующих нас исходов легче будет подсчитать без ошибки. На рис. 24 показан результат такого варианта статистического эксперимента. По счастливой случайности доля испытаний, в которых буквы **к** и **р** оказались рядом, здесь получилась в точности равной искомой вероятности $p = 0{,}2$.

Для выполнения большего числа опытов (скажем, десяти тысяч или миллиона) можно написать специальную программу на каком-либо языке программирования высокого уровня (что было бы неплохим опытом СМ).

Но можно, немного переформулировав задачу, выполнить десяток тысяч опытов в программе Excel.

Действительно, представляя себе структуру рассматриваемого множества перестановок, нетрудно догадаться, что карандаш (как и ручка) с равной вероятностью может оказаться в любой из 10 позиций последовательности предметов. Поэтому можно переформулировать задачу так: карандаш помещается в случайно выбранную позицию, одну из 10. Ручка помещается в случайно выбранную позицию, одну из 9 оставшихся. Какова вероятность p того, что карандаш и ручка окажутся рядом?

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
13	слчис	перестан	слчис	перестан	слчис	перестан	слчис	перестан	слчис	перестан
14	0,142583	п1	0,10116	п6	0,056027	п7	0,033821	п2	0,002612	к
15	0,149784	п3	0,206443	р	0,083463	п8	0,100473	п1	0,077675	п1
16	0,265171	п2	0,335096	п7	0,152092	п6	0,160808	п4	0,086846	п8
17	0,442509	п4	0,401615	п2	0,238177	к	0,192421	п8	0,219179	п3
18	0,489624	к	0,413999	п1	0,252137	п5	0,399211	п7	0,315142	п5
19	0,567928	п6	0,728056	п4	0,315011	п3	0,608008	п6	0,325521	п4
20	0,618305	п5	0,737449	п3	0,353281	п4	0,68263	п5	0,4801	п2
21	0,632239	р	0,766372	п8	0,356803	п2	0,768743	п3	0,56182	п6
22	0,920231	п8	0,871444	к	0,392543	п1	0,885162	р	0,624865	р
23	0,98478	п7	0,98026	п5	0,883378	р	0,982854	к	0,963719	п7
24										
25	слчис	перестан	слчис	перестан	слчис	перестан	слчис	перестан	слчис	перестан
26	0,008613	п8	0,008918	п4	0,012773	п5	0,040529	п3	0,08229	п1
27	0,035255	п7	0,019207	п1	0,019528	п8	0,25139	п8	0,116373	п3
28	0,219093	р	0,215383	п3	0,158033	п7	0,288477	п5	0,369252	р
29	0,274669	п3	0,473053	п2	0,383539	п4	0,31903	п6	0,382675	п4
30	0,282614	п1	0,541718	п6	0,429199	п1	0,521357	п7	0,43303	п5
31	0,394505	п5	0,643676	п5	0,441579	п3	0,527381	п2	0,560509	п2
32	0,429198	к	0,767878	п7	0,466549	р	0,562926	п1	0,622101	п6
33	0,705351	п2	0,817782	к	0,519572	п6	0,749244	к	0,71282	п7
34	0,780135	п4	0,81964	р	0,665665	к	0,952977	п4	0,938959	п8
35	0,910129	п6	0,953165	п8	0,727676	п2	0,983063	р	0,940602	к
36										

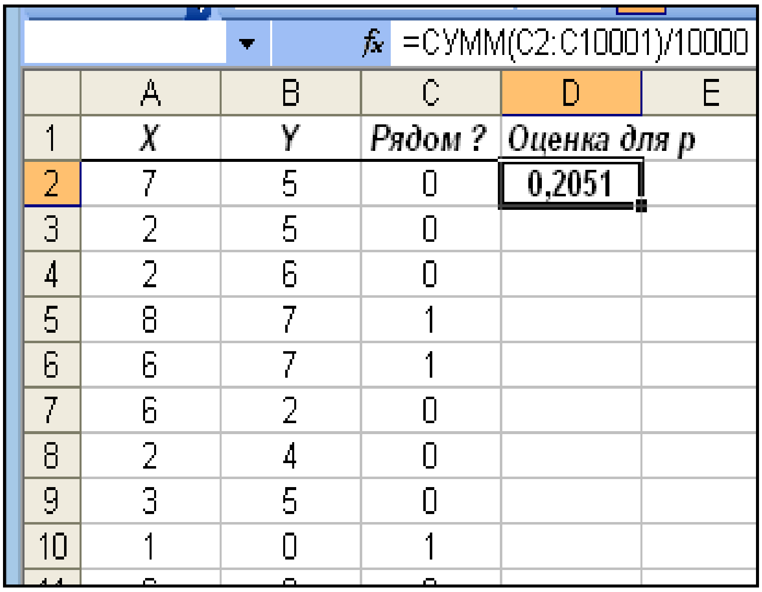
Рис. 24. Реализация случайных перестановок

Найдем теоретическое решение переформулированной задачи. Карандаш с вероятностью 0,2 окажется на краю полосы позиций (гипотеза H_1), и тогда вероятность того, что ручка окажется рядом с ним, составит 1/9. С вероятностью 0,8 карандаш окажется не на краю полосы позиций (гипотеза H_2), и тогда вероятность того, что ручка окажется рядом, составит 2/9. В соответствии с формулой полной вероятности получаем $p = 0{,}2\cdot(1/9) + 0{,}8\cdot(2/9) = 1{,}8/9 = 0{,}2$.

В Excel опыты с выбором двух позиций (только для карандаша и ручки) произведем путем разыгрывания равномерной целой СВ X (номера позиции для карандаша) и равномерной целой СВ Y – номера позиции для ручки. Позиции пронумеруем от 0 до 9. Разыграть СВ, принимающую одно из n значений от 0 до $n – 1$ с равными вероятностями $1/n$, можно путем преобразования БСВ U в соответствии с формулой (58).

После разыгрывания СВ X нужно СВ Y разыграть так, чтобы она не совпала с X. Это можно сделать путем добавления к X равномерной СВ, принимающей с вероятностями 1/9 значения от 1 до 9, и последующего вычисления остатка от деления полученной суммы на 10.

Итак, на новом листе Excel введите в ячейку A1 заголовок столбца X и в ячейку A2 формулу =ЦЕЛОЕ(10*СЛЧИС()). В ячейку B1 введите заголовок столбца Y и в ячейку B2 формулу =ОСТАТ(A2+ЦЕЛОЕ(9*СЛЧИС()+1);10). Чтобы подсчитывать долю случаев, в которых X и Y отличаются на единицу, в ячейку C2 введите формулу-индикатор =(ABS(A2-B2)=1)+0 (прибавление нуля к логическому значению ИСТИНА/ЛОЖЬ преобразует его в арифметическое значение 1/0). Скопируйте эти две ячейки на 10000 ячеек вниз (рис. 25).



fx =СУММ(C2:C10001)/10000

	A	B	C	D	E
1	*X*	*Y*	*Рядом ?*	*Оценка для p*	
2	7	5	0	0,2051	
3	2	5	0		
4	2	6	0		
5	8	7	1		
6	6	7	1		
7	6	2	0		
8	2	4	0		
9	3	5	0		
10	1	0	1		

Рис. 25. Решение задачи 2 методом СМ

Оценку $\hat{p}$ искомой вероятности p вычислите в ячейке D2 по формуле =СУММ(C2:C10001)/10000. Нажимая клавишу F9, понаблюдайте, как изменяется оценка искомой вероятности от эксперимента к эксперименту.

4.8.2. Другие варианты задачи

В других вариантах задачи 2 (см. главу 2) рассматриваются случайные распределения некоторого числа n одинаковых «предметов» по m разным «ящикам» и ставится вопрос о вероятности того, что случайное распределение окажется принадлежащим тому или иному подмножеству таких распределений. В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Семь шаров (n = 7) случайным образом разложили по девяти коробкам (m = 9). Найти вероятность p того, что в одну коробку попадет четыре шара, а в другую – три.

В этой задаче естественно полагать, что всякий шар равновероятно попадает в любую коробку. Найдем точное теоретическое решение задачи.

Пронумеруем шары и будем представлять исход испытания (конкретное распределение шаров) строкой из $n = 7$ номеров, первая из которых – это номер коробки, в которую попал первый шар, вторая – номер коробки, в которую попал второй шар, ..., n-й – номер коробки, в которую попал последний шар. Каждый из $n = 7$ номеров может принять любое значение от 1 до $m = 9$ с вероятностью $1/m = 1/9$ независимо от остальных номеров. Всякий конкретный исход испытания, например 1, 1, 1, 1, 9, 9, 9, будучи произведением $n = 7$ независимых случайных событий, имеет вероятность, равную произведению вероятностей этих событий, т. е. равную $(1/9) \cdot (1/9) \cdot \ldots \cdot (1/9) = (1/9)^7$, в общем виде $(1/m)^n$. В исходе 1, 1, 1, 1, 9, 9, 9 четыре шара попадают в одну коробку и три шара – в другую. По условию задачи нужно найти сумму вероятностей *всех подобных исходов* (в которых какие-либо две коробки из $m = 9$ появились одна $n_1 = 4$ раза, другая $n_2 = 3$ раза, $n_1 \neq n_2$, $n_1 + n_2 = n$). А для этого нам остается только найти *число таких исходов*.

Первый номер из $m = 9$ (который встретится в исходе четырежды) можно выбрать $m = 9$ способами, второй (который встретится трижды) $(m - 1) = 8$ способами, пару таких номеров можно выбрать $A_m^2 = A_9^2 = 9 \cdot 8 = 72$ способами. После этого можно $C_n^{n1} = C_n^{n-n1} = C_7^3 = 35$ способами выбрать n_1 позиций из n для первого номера пары. Таким образом, в соответствии с правилом произведения число интересующих нас исходов определяется выражением $A_m^2 C_n^{n1} = 72 \cdot 35 = 2520$.

Вероятность каждого из этих исходов равна $(1/m)^n$, поэтому искомая их сумма p составляет

$$p = A_m^2 C_n^{n1} (1/m)^n = \frac{A_m^2 C_n^{n1}}{m^n} = \frac{2520}{9^7} \approx 0{,}000527 .$$

Теперь решим эту задачу с помощью статистического эксперимента. На новом листе Excel, оставив первую его строку для заголовков, введите в ячейку A2 формулу =ЦЕЛОЕ(9*СЛЧИС())+1 и скопируйте на семь ячеек по горизонтали. Эта формула отличается от формулы (58) добавлением единицы, поэтому она генерирует случайный номер не от 0 до 8, а от 1 до 9 – номер выбранной коробки. Всего в диапазоне A2:G2 будет сгенерировано семь номеров коробок, выбранных шарами (рис. 26). В ячейках I2:Q2 сформируем строку состояний девяти коробок, т. е. определим, сколько шаров попало в каждую коробку. Для этого в ячейку I2 введем формулу =СЧЁТЕСЛИ(A2:G2;1). Формула подсчитывает по диапазону A2:G2 число ячеек, содержащих значение 1 (т. е. число шаров, выбравших коробку 1). В ячейку J2 введем формулу =СЧЁТЕСЛИ(A2:G2;2), …, в ячейку Q2 – формулу =СЧЁТЕСЛИ(A2:G2;9). Сумма чисел в диапазоне I2:Q2 всегда получается равной 7, так как в коробках находится семь шаров.

S2 =СЧЁТЕСЛИ(I2:Q2;3)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
1	ИСХОДЫ								ЧИСЛО ШАРОВ В КОРОБКАХ										есть 3	есть 4	Индикатор		Оценка для р
2	4	7	1	5	6	7	2		1	1	0	1	1	1	2	0	0		0	0	0		0,00050
3	9	7	7	6	4	8	4		0	0	0	2	0	1	2	1	1		0	0	0		
4	2	5	6	1	9	4	2		1	2	0	1	1	1	0	0	1		0	0	0		
5	7	9	2	7	2	9	8		0	2	0	0	0	0	2	1	2		0	0	0		
6	7	1	2	5	9	7	7		1	1	0	0	1	0	3	0	1		1	0	0		
7	2	1	2	4	6	2	1		2	3	0	1	0	1	0	0	0		1	0	0		
8	1	5	1	5	3	5	4		2	0	1	1	3	0	0	0	0		1	0	0		
9	9	8	1	5	7	1	8		2	0	0	0	1	0	1	2	1		0	0	0		
10	1	6	8	9	6	4	5		1	0	0	1	1	2	0	1	1		0	0	0		
11	7	6	8	5	6	2	4		0	1	0	1	1	2	1	1	0		0	0	0		
12	4	1	5	7	5	5	5		1	0	0	1	4	0	1	0	0		0	1	0		
13	1	6	9	8	1	6	3		2	0	1	0	0	2	0	1	1		0	0	0		

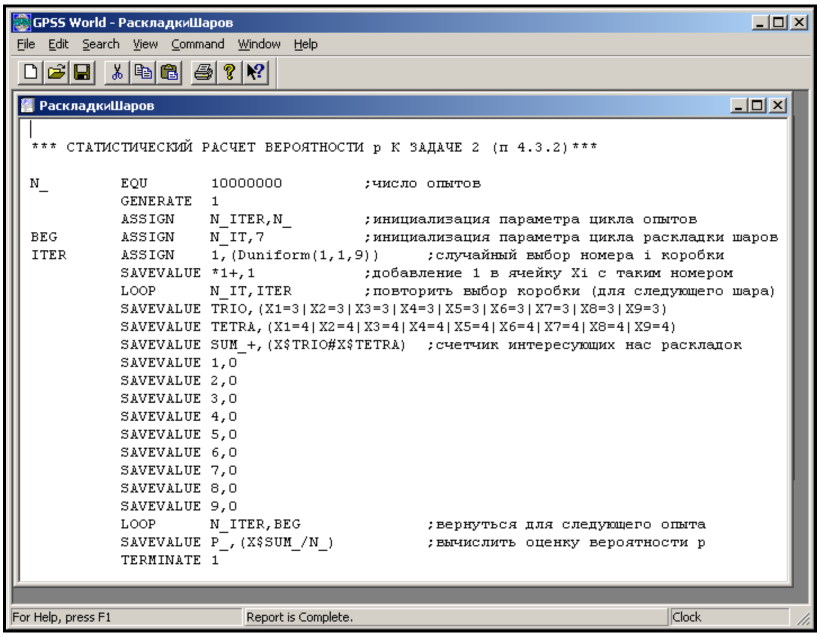
Рис. 26. Опыты со случайными распределениями семи шаров по девяти коробкам

Осталось определить, является ли полученное распределение шаров таким, что в одну коробку попало три шара, в другую – четыре. Для этого в ячейку S2 введем =СЧЁТЕСЛИ(I2:Q2;3) и в ячейку T2 введем =СЧЁТЕСЛИ(I2:Q2;4). В ячейке S2 определяется, сколько коробок содержат по три шара, в ячейке T2 – сколько коробок содержат по четыре шара. Если распределение шаров такое, которое нас интересует, то произведение ячеек S2 и T2 будет равно единице, иначе оно равно нулю. Записав формулу =S2*T2 в ячейку U2, мы получаем в ней индикатор того, что произошло интересующее нас распределение шаров по коробкам.

Выделим диапазон ячеек A2:U2 и скопируем его вниз на 50000 строк. В ячейку W2 для расчета оценки вероятности p введем формулу =СУММ(U2:U50001)/50000 (см. рис. 26).

Поскольку объем вычислений получается достаточно большим, расчет листа занимает некоторое время. Последующие пересчеты листа при нажатиях клавиши F9 выполняются относительно быстро. При этом мы видим, что оценка для p, получаемая в серии экспериментов, колеблется в окрестности найденного выше точного значения p = 0,000527, но ее возможные отклонения достаточно велики. Оценка вероятности попадает в основном в пределы от 0,0003 до 0,0007, т. е. ее возможные отклонения от точного значения составляют до 50 %.

Обсуждение. Из закона больших чисел в форме Бернулли следует, что мы можем получить более точное решение рассмотренной задачи о шарах, увеличив число опытов. Проведем, например, не 50 тыс., а 10 млн опытов. С помощью Excel сгенерировать 10 млн случайных распределений шаров было бы весьма затруднительно, поэтому приходится пожертвовать наглядностью Excel и писать программу. Для выполнения статистических экспериментов можно, например, написать программу на языке GPSS [11], как это показано на рис. 27.




```
*** СТАТИСТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТИ р К ЗАДАЧЕ 2 (п 4.3.2)***

N_        EQU       10000000            ;число опытов
          GENERATE  1
          ASSIGN    N_ITER,N_           ;инициализация параметра цикла опытов
BEG       ASSIGN    N_IT,7              ;инициализация параметра цикла раскладки шаров
ITER      ASSIGN    1,(Duniform(1,1,9))       ;случайный выбор номера i коробки
          SAVEVALUE *1+,1               ;добавление 1 в ячейку Xi с таким номером
          LOOP      N_IT,ITER           ;повторить выбор коробки (для следующего шара)
          SAVEVALUE TRIO,(X1=3|X2=3|X3=3|X4=3|X5=3|X6=3|X7=3|X8=3|X9=3)
          SAVEVALUE TETRA,(X1=4|X2=4|X3=4|X4=4|X5=4|X6=4|X7=4|X8=4|X9=4)
          SAVEVALUE SUM_+,(X$TRIO#X$TETRA)   ;счетчик интересующих нас раскладок
          SAVEVALUE 1,0
          SAVEVALUE 2,0
          SAVEVALUE 3,0
          SAVEVALUE 4,0
          SAVEVALUE 5,0
          SAVEVALUE 6,0
          SAVEVALUE 7,0
          SAVEVALUE 8,0
          SAVEVALUE 9,0
          LOOP      N_ITER,BEG                ;вернуться для следующего опыта
          SAVEVALUE P_,(X$SUM_/N_)            ;вычислить оценку вероятности р
          TERMINATE 1
```

Рис. 27. GPSS-модель случайных распределений семи шаров по девяти коробкам

Эта программа выполняется на персональном компьютере около 2–3 мин и дает для вероятности p оценку 0,0005274, действительно более близкую к значению p = 0,000527, найденному выше точным методом. Еще три старта программы дают оценки 0,0005253, 0,0005246 и 0,0005251. Погрешности всех четырех оценок лежат в пределах 0,5 %.

4.9. Решение задачи 3: расчет геометрической вероятности

4.9.1. Расчет методом статистического моделирования

В демонстрационном варианте задачи 3 (см. главу 3) требуется найти вероятность p того, что наудачу брошенная в область $D:\{0 \le x \le 1;\, 0 \le y \le 1\}$ точка попадет в область $d:\{0 \le x \le 1;\, 0 \le y \le f(x)\}$, где $f(x) = \min\left(2 - e^{x-\frac{1}{3}};\ \lg(27x+1)\right)$. Точным теоретическим методом найдено решение $p = 0{,}611$.

Решим теперь эту же задачу экспериментально методом СМ.

Откроем новый лист Excel и разыграем 10 тыс. случайных точек, лежащих в квадрате $D:\{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$, так, как делали это в опыте, представленном на рис. 19.

В ячейку C2 введем формулу =МИН(2-EXP(A2-1/3);LOG(27*A2+1)) для вычисления ординаты *f*(*X*) точки, лежащей при данном *X* на верхней границе области *d*. В ячейке D2 индикацию события «точка (*X*, *Y*) попала в область *d*» обеспечим вводом формулы =(B2<C2)+0. Диапазон ячеек C2:D2 скопируем на 10000 строк вниз.

Для вычисления оценки искомой вероятности *p* введем формулу =СУММ(D2:D10001)/10000 в ячейку E2 (рис. 28).

E2 =СУММ(D2:D10001)/10000

	A	B	C	D	E
1	X	Y	f(x)	y<f(x)	Оценка для p
2	0,216432	0,084972	0,835288	1	0,613
3	0,744069	0,541691	0,492073	0	
4	0,987094	0,053216	0,077242	1	
5	0,411847	0,055191	0,918322	1	
6	0,083787	0,302439	0,513518	1	
7	0,675943	0,052087	0,591381	1	
8	0,135339	0,213313	0,667842	1	
9	0,513902	0,168499	0,802101	1	

Рис. 28. Решение задачи 3 методом СМ

В серии экспериментов, реализуемой нажатиями клавиши F9, оценка колеблется незначительно. Ее отклонения от значения 0,611, найденного точным методом, лежат в пределах 2 %.

Сохраните файл.

4.9.2. Расчет малой вероятности непосредственным СМ

Модифицируем задачу: в качестве нижней границы области *d* возьмем прямую $y = 0{,}99$. В результате вероятность *p* значительно уменьшается и возникает проблема оценки малой вероятности.

Для экспериментального нахождения величины *p* откройте сохраненный лист (см. рис. 28), замените формулу =(B2<C2)+0 индикатора в ячейке D2 на формулу =(B2<C2)*(B2>0,99)+0 и скопируйте ячейку D2 вниз на весь диапазон ранее введенных формул. В результате нескольких нажатий клавиши F9 теперь оценки для *p* колеблются около их среднего значения 0,0002 в интервале от 0 до 0,0004 (рис. 29). Модуль их относительной погрешности грубо можно оценить отношением длины 0,0002 полуинтервала разброса к среднему значению 0,0002, что составляет 1, т. е. 100 %.

D2 | fx | =(B2<C2)*(B2>0,99)+0

	A	B	C	D	E
1	x	y	f(x)	y<f(x)	**Оценка для р**
2	0,750225	0,242679	0,482762	0	**0**
3	0,426101	0,743743	0,902793	0	
4	0,790635	0,559066	0,420195	0	
5	0,679447	0,15355	0,586437	0	
6	0,898784	0,079055	0,239759	0	
7	0,341807	0,731486	0,991491	0	
8	0,922833	0,969456	0,196914	0	
9	0,065236	0,898983	0,441125	0	

Рис. 29. Решение модифицированной задачи 3 непосредственным СМ

Этот эксперимент, как и эксперимент, проведенный в п. 4.9.1, представляет собой так называемое непосредственное СМ, поскольку в обоих случаях задача решается так, как она изначально формулируется. Чтобы повысить точность результатов непосредственного СМ, можно увеличить число опытов. Однако этот путь не всегда возможен из-за того, что необходимое число опытов может оказаться слишком большим. В таких случаях можно попытаться применить так называемый аналитико-статистический подход, который состоит в том, чтобы от исходной формулировки задачи перейти к другой, эквивалентной, но при реализации эксперимента приводящей к повышению его точности (при том же числе опытов) или к уменьшению требуемого числа опытов (при той же точности). Такое СМ в отличие от непосредственного называют ускоренным СМ.

Достичь желаемого ускорения эксперимента удается, как правило, за счет использования какой-либо дополнительной информации, которую можно извлечь из условия исходной задачи без проведения эксперимента. Часто для этой цели применяют аппарат условных вероятностей.

4.9.3. Расчет малой вероятности ускоренным методом

Способ ускорения эксперимента для расчета малой вероятности p можно проиллюстрировать с помощью рис. 30. По условию задачи случайная точка (X, Y) выбрасывается в область D (представляющую собой единичный квадрат) и требуется рассчитать вероятность $p = \mathrm{P}(d) = \mathrm{P}[(X,Y)\in d]$.

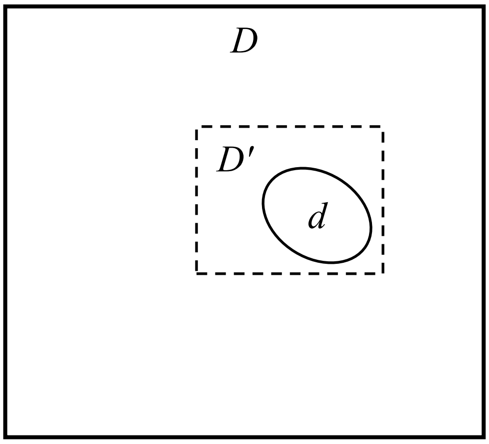


Рис. 30. К ускорению расчета малой вероятности

Введем дополнительную область D', охватывающую область d, и выразим искомую вероятность $p = \mathrm{P}(d)$ через вероятность $\mathrm{P}(D')$ попадания случайной точки в область D':

$$p = \mathrm{P}(d) = \mathrm{P}(D')\mathrm{P}(d \mid D'), \tag{69}$$

где $\mathrm{P}(d \mid D') = \mathrm{P}[(X,Y) \in d \mid (X,Y) \in D']$ – условная вероятность попадания точки в область d при условии, что точка попала в область D'. Если вероятность $\mathrm{P}(D')$ известна или легко может быть вычислена, то в соответствии с (69) остается найти условную вероятность $P(d \mid D')$. Таким образом, посредством соотношения (69) исходная задача расчета малой вероятности p сводится к задаче расчета не малой вероятности $P(d \mid D')$.

Для применения этого подхода к конкретной решаемой сейчас задаче целесообразно выбрать в качестве области D' прямоугольник (чтобы вероятность $\mathrm{P}(D')$, равная площади этого прямоугольника, легко вычислялась), причем такой, чтобы область d оказалась вписанной в него (тогда условная вероятность $P(d \mid D')$ будет при выбранной ориентации прямоугольника максимальной).

Для экспериментального расчета условной вероятности $P(d \mid D')$ будем выбрасывать случайную точку (X, Y) только в область D', реализуя тем самым лишь те исходы (в отличие от непосредственного СМ), которые в эту область D' попадают. Поскольку мы имеем дело с равномерным распределением двумерной СВ (X, Y) в области D, то исходы, попадающие в область D', также распределены равномерно. Реализовать СВ (X, Y), равномерно распределенную в прямоугольной области $D' : \{a \le x \le b;\ g \le y \le h\}$, можно путем следующего преобразования двух реализаций U_1 и U_2 БСВ U:

$$X = (b - a)U_1 + a, \tag{70}$$
$$Y = (h - g)U_2 + g.$$

В решаемой задаче нижней границей области d является прямая $y = 0{,}99$, верхней границей – прямая $y = 1$. Поэтому для области $D' : \{a \le x \le b;\ g \le y \le h\}$ выбираем соответственно $g = 0{,}99$ и $h = 1$. Параметры a и b области D' определим как абсциссы точек пересечения заданной кривой $f(x)$ (верхней границы области d) с прямой $y = 0{,}99$. Используя уравнение этой кривой $f(x)$ (см. п. 4.9.1), определяем, что $a = \ln(1{,}01)+1/3$, $b = (10^{0{,}99} - 1)/27$. Работая в Excel, нетрудно вычислить значения этих параметров: $a = 0{,}324903$, $b = 0{,}343284$.

Теперь для выполнения ускоренного СМ остается в лист, показанный на рис. 29, внести следующие небольшие корректировки. Формулу в ячейке A2 замените в соответствии с (70) и найденными значениями a, b формулой

=0,018381*СЛЧИС()+0,324903.

Аналогично в ячейку B2 введите новую формулу = 0,01*СЛЧИС()+0,99. Скопируйте пару ячеек A2:B2 вниз на весь диапазон ранее введенных формул. Формулы, вычисляющие индикатор попадания точки в область d, на листе уже есть. Вычисляемая вероятность теперь является условной вероятностью $P(d \mid D')$, поэтому ее название в ячейке E1 нужно соответствующим образом исправить (рис. 31).

fx =0,00018381*E2

	A	B	C	D	E
1	*X*	*Y*	f(x)	y<f(x)	P(d|D')
2	0,334172	0,993964	0,999161	1	**0,495**
3	0,341261	0,998188	0,99204	0	
4	0,326306	0,996405	0,991681	0	**p**
5	0,335784	0,997685	0,997547	0	**0,000091**
6	0,330466	0,993201	0,996625	1	
7	0,326742	0,990356	0,992202	1	
8	0,330395	0,994845	0,996541	1	
9	0,331967	0,992443	0,998394	1	

Рис. 31. Решение модифицированной задачи 3 ускоренным методом СМ

В ячейку E5 для расчета в соответствии с (69) искомой вероятности p введите формулу =0,00018381*E2, в которой числовой множитель представляет собой величину $\mathrm{P}(D') = (b - a)(h - g)$.

В небольшой серии экспериментов, выполняемой путем нажатий клавиши F9, можно видеть, что теперь оценка (в ячейке E5) колеблется около значения 0,000092 в пределах от 0,000090 до 0,000094. Ее относительная погрешность составляет приблизительно 0,000002/0,000092 ≈ 0,02 или около 2 %.

Таким образом, относительная погрешность оценки малой вероятности p в ускоренном СМ сократилась по сравнению с непосредственным СМ (где она составляла 100 %) при том же объеме выборки в 50 раз.

<u>Обсуждение</u>. Заметим, что статистическим методом здесь рассчитывалась лишь оценка условной вероятности (в ячейке E2), а оценка искомой вероятности p (в ячейке E5) ей просто пропорциональна. Поэтому относительные погрешности этих двух оценок в точности совпадают. Условная же вероятность в ячейке E2 имеет здесь приблизительно такую же величину, как вероятность p в исходной задаче (см. п. 4.9.1). Поэтому и относительная погрешность расчетов оказалась теперь приблизительно такой же, около 2 %.

Что касается грубо рассчитанного коэффициента 50 – коэффициента снижения относительной погрешности, то его можно уточнить следующим образом. В непосредственном СМ оценка вероятности колебалась от 0 до 0,0004, следовательно, ее отклонение от вероятности $p \approx 0{,}000092$ (теперь измеренной более точно) достигало 0,0003 и относительная погрешность ограничивалась не 100 %, а $(0{,}0003/0{,}000092)\cdot 100\% \approx 326$ %, т. е. коэффициент снижения относительной погрешности на самом деле составил около 300. Погрешность снизилась более чем на два порядка.

Первоначальная оценка погрешностей непосредственного СМ, рассчитанная в п. 4.9.2, оказалась не вполне состоятельной потому, что число реализаций случайного события в каждом эксперименте не достигало даже десятка (см. формулу (68)) – оно не превышало 4 и часто было равно нулю.

4.10. Задача расчета надежности

Видоизменим схему электрической цепи, приведенную в демонстрационном варианте задачи 5, соединив ее элементы так, как показано на рис. 32.

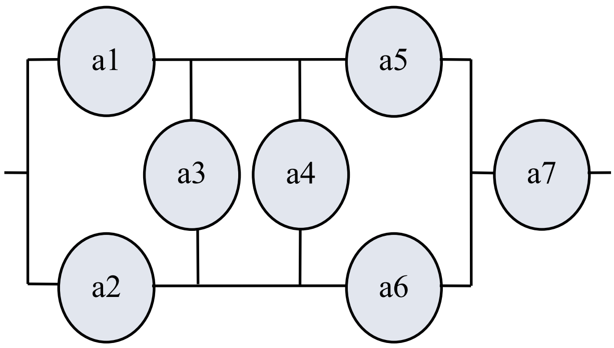


Рис. 32. Видоизмененная схема

Эта схема не относится к параллельно-последовательным структурным схемам – она не составлена из двухполюсников, представляющих собой либо последовательные цепочки элементов, либо параллельные их соединения, которые между собою также соединяются либо последовательно, либо параллельно. Она относится к так называемым *неприводимым* схемам, к которым не получается применить рассуждения, подобные приведенным в демонстрационном решении. Для теоретико-вероятностного расчета надежности неприводимой схемы иногда приходится просто перебирать все 2^N комбинации бинарных состояний N элементов и суммировать вероятности тех комбинаций, при которых система работоспособна. Понятно, что при $N > 40–50$ такой перебор становится практически невозможным.

Столь резкий рост затрат времени на расчет неприводимых схем не характерен для метода СМ. Выполним этим методом расчет надежности схемы, изображенной на рис. 32 (при числовых данных, приведенных в демонстрационном варианте задачи).

Откройте новый лист Excel и оформите заголовки, как показано на рис. 33. Обозначения q_1, …, q_7 соответствуют вероятностям работоспособного состояния элементов, сами вероятности приведены во второй строке листа. Обозначения X_1, …, X_7 соответствуют индикаторам отказа элементов. Индикатор отказа равен единице, если элемент находится в состоянии отказа (и нулю, если элемент находится в противоположном, т. е. в работоспособном, состоянии).

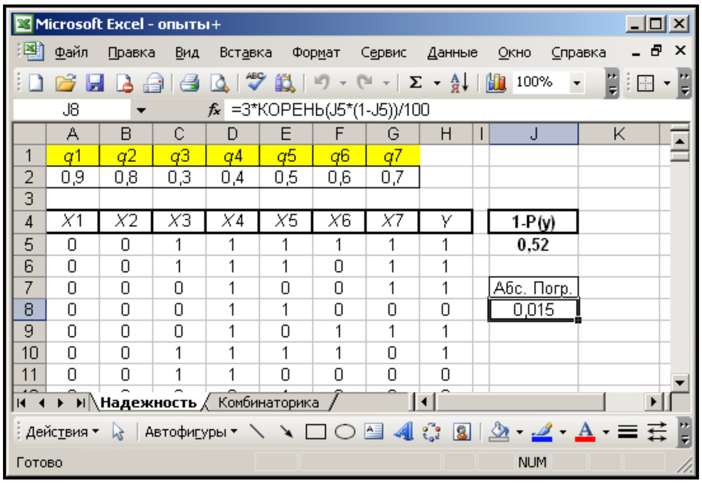


Рис. 33. Расчет надежности неприводимой схемы

Для реализации индикатора отказа X_1 введите в ячейку A5 формулу =(СЛЧИС()>A$2)+0. Скопируйте эту ячейку на диапазон A5:G10004. Тем самым будут реализованы 10 тыс. опытов (выборок комбинаций состояний), по одной реализации в каждой строке диапазона.

Для каждой комбинации состояний элементов индикатор Y отказа системы в целом определяется по структурной схеме, представленной на рис. 32. Система отказывает тогда и только тогда, когда отсутствует путь, соединяющий вход и выход системы (при отказе какого-либо элемента он «выпадает» из структурной схемы).

Вычислить индикатор отказа системы через индикаторы отказа элементов в данном случае (см. схему на рис. 32) можно по логической формуле

$$Y = X_1X_2 \vee X_5X_6 \vee X_1X_3X_4X_6 \vee X_2X_3X_4X_5 \vee X_7, \qquad (71)$$

в которой знаком $\vee$ обозначена операция дизъюнкции (операция «ИЛИ»). Эта формула вводится в ячейку H5 в таком виде:

=ИЛИ(A5*B5;E5*F5;A5*C5*D5*F5;B5*C5*D5*E5;G5)+0, и при ее наборе, чтобы не ошибиться, аргументы функции ИЛИ лучше вводить щелчком мыши по ячейкам, соответствующим аргументам выражения (71).

Скопируйте ячейку H5 на столбец ячеек H5:H10004.

Оценку для вероятности работоспособного состояния системы рассчитайте в ячейке J5 формулой =1-СУММ(H5:H10004)/10000.

В ячейке J8 рассчитайте погрешность |Δ| полученной оценки по формуле (66), т. е. в виде =3*КОРЕНЬ(J5*(1-J5))/100.

Обсуждение. В случае больших схем вычисление величины Y для конкретных комбинаций состояний элементов производится по несложному алгоритму, выполняющему анализ связности двух вершин (полюсов) графа.

Число n опытов, т. е. число анализируемых комбинаций состояний элементов, в методе СМ не зависит от числа N элементов в системе, поэтому рост N не приводит к экспоненциальному росту времени вычислений.

Число опытов определяется только требованиями к точности, которую должна иметь оценка вероятности отказа системы. В инженерной практике надежность систем обеспечивается с многократным запасом, поэтому погрешности оценок на уровне 10 % вполне удовлетворительны.

В случаях моделирования высоконадежных систем, т. е. когда возникает проблема оценки малой вероятности отказа, используется ускоренное СМ. Метод ускорения расчетов надежности аналогичен методу, проиллюстрированному на рис. 30. В опытах воспроизводятся не все комбинации отказов элементов, а лишь те, в которых отказывает хотя бы один элемент или число элементов, не меньшее заданного. Затем найденные условные вероятности отказа системы пересчитываются в искомые безусловные вероятности [9].

4.11. Решение комбинаторных задач

Классическая вероятность $\mathrm{P}(A)$ определяется в виде дроби

$$\mathrm{P}(A) = \frac{m}{n}, \tag{72}$$

где $\mathrm{P}(A)$ – вероятность случайного события A;

m – число благоприятных для события A исходов,

n – общее число элементарных исходов (см. п. 1.2.2).

Значение m часто представляет собой число определенного вида комбинаций, нахождение которого иногда является непростой комбинаторной задачей. Тем не менее, в формуле (72) мы m считаем известным и искомую величину $\mathrm{P}(A)$ определяем через m.

С другой стороны, в комбинаторике часто приходится рассчитывать или приближенно оценивать число такого вида комбинаций, которые не удается «пересчитать» приемлемыми по сложности формулами, и тогда приходится обращаться к методу полного перебора комбинаций. Но осуществить полный перебор, в свою очередь, удается далеко не всегда из-за принципиально ограниченного быстродействия компьютеров (см. в [9] предел Бремермана – Эшби). Или не всегда имеется время для программирования и выполнения полного перебора при том, что точного определения искомого числа комбинаций не требуется.

В таких случаях может выручить метод СМ. С помощью формулы (72) число комбинаций m можно выразить в виде

$$m = n\mathrm{P}(A), \tag{73}$$

вероятность $\mathrm{P}(A)$ можно рассчитать методом СМ, и через нее найти искомое m.

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу о выборе оптимального варианта схемы.

Задача. Варианты проектируемого изделия определяются размещением 190 идентичных элементов по 20 разным позициям схемы. В каждой позиции может находиться не менее 8 и не более 12 элементов. При выборе оптимального варианта изделия суперкомпьютер за одну секунду рассчитывает технические параметры 1 млн вариантов. Для принятия решения о целесообразности выполнения такой оптимизации проектировщикам необходимо определить, какое потребуется время для расчета всех вариантов.

Для решения этой задачи требуется найти число m вариантов изделия. Это число равно числу способов разложения суммы 190 на 20 слагаемых, принимающих целые значения от 8 до 12, т. е. числу решений уравнения

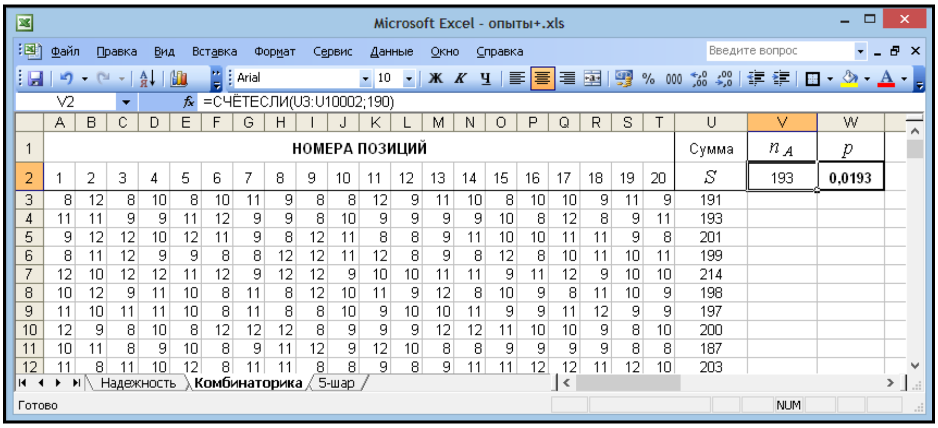
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{20} = 190$$

в целых числах $8 \le x_i \le 12$ ($i = 1, \ldots, 20$).

Чтобы воспользоваться для расчета m формулой (73), определим число n элементарных исходов как число всех возможных строк, которые состоят из 20 целых чисел, принимающих значения от 8 до 12. Тогда $n = 5^{20} \approx 9{,}54 \cdot 10^{13}$. Вероятность P($A$) определим как вероятность того, что в строке, случайно выбранной из таких строк, сумма элементов равна 190. Эту вероятность P(A) рассчитаем методом СМ, подставим ее в равенство (73) и найдем m.

Таким образом, вместо исходной комбинаторной задачи мы решим эквивалентную ей вероятностную задачу: найти вероятность P(A) того, что сумма S двадцати СВ X_i равна 190, если все X_i независимы и равномерно распределены на множестве значений 8, 9, ..., 12.

На новом листе Excel оформите заголовки, как показано на рис. 34.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
1	НОМЕРА ПОЗИЦИЙ																				Сумма	n_A	p
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	S	193	0,0193
3	8	12	8	10	8	10	11	9	8	8	12	9	11	10	8	10	10	9	11	9	191		
4	11	11	9	9	11	12	9	9	8	10	9	9	9	9	10	8	12	8	9	11	193		
5	9	12	12	10	12	11	9	8	12	11	8	8	9	11	10	10	11	11	9	8	201		
6	8	11	12	9	9	8	8	12	12	11	12	8	9	8	12	8	10	11	10	11	199		
7	12	10	12	12	11	12	9	12	12	9	10	10	11	11	9	11	12	9	10	10	214		
8	10	12	9	11	10	8	11	8	12	10	11	9	12	8	10	9	8	11	10	9	198		
9	11	10	11	11	10	8	11	8	8	10	9	10	10	11	9	9	11	12	9	9	197		
10	12	9	8	10	8	12	12	12	8	9	9	9	12	12	11	10	10	9	8	10	200		
11	10	11	8	9	10	8	9	11	12	9	12	10	8	8	9	9	9	9	8	8	187		
12	11	8	11	10	12	8	11	11	8	8	9	8	9	11	11	12	12	11	12	10	203		

Рис. 34. Расчет вероятности строки

В ячейку A3 введите формулу =ЦЕЛОЕ(5*СЛЧИС())+8, в которой используется преобразование (58) значений БСВ в целые числа. Скопируйте ячейку A3 на строку ячеек под заголовком «НОМЕРА ПОЗИЦИЙ». Скопируйте полученную строку вниз на диапазон из 10 тыс. строк. В ячейку U3 введите формулу =СУММ(A3:T3). Скопируйте ячейку U3 вниз на столбец, соответствующий всем 10 тыс. случайным строкам. В ячейку V2 введите формулу =СЧЁТЕСЛИ(U3:U10002;190), которая подсчитает число строк, имеющих нужную сумму S. В ячейку W2 введите формулу =V2/10000 для расчета вероятности p = P(A).

Выполнив теперь несколько экспериментов нажатиями клавиши F9, можно легко определить, что P(A) ≈ 0,018. Тогда, согласно (73), число вариантов изделия $m = n\mathrm{P}(A) \approx 9{,}54 \cdot 10^{13} \cdot 0{,}018 \approx 1{,}72 \cdot 10^{12}$.

Таким образом, рассчитывая в секунду 1 млн вариантов изделия, суперкомпьютер найдет оптимальный вариант за $1{,}68 \cdot 10^{6}$ с, т. е. за 19,4 сут.

Обсуждение. Выполненный пример показывает, что посредством экспериментов со случайными числами можно решать не только вероятностные, но и детерминированные задачи. Для этого детерминированные задачи сводятся к вероятностным задачам, которые затем решают методом СМ.

Нередко этот подход позволяет решать такие сложные комбинаторные задачи, для которых детерминированные пути решения практически нереализуемы [12]. Но чаще всего переход от комбинаторной постановки задачи к вероятностной имеет смысл делать в тех случаях (как и в только что рассмотренном), когда СМ существенно упрощает поиск требуемого решения и позволяет найти его с достаточной точностью за достаточно короткое время.

Иногда после того, как комбинаторная задача сведена к вероятностной, последнюю оказывается возможным решить (точно или приближенно) и без обращения к СМ, т. е. аналитическими методами теории вероятностей [13].

Например, рассмотренную только что задачу о выборе оптимального варианта схемы (в вероятностной ее постановке) можно решить приближенно и без обращения к СМ.

Действительно, исходя из центральной предельной теоремы теории вероятностей, мы можем предположить, что СВ $S = (X_1 + ... + X_{20})$ близка по распределению к нормальной СВ $\dot{S}$ со средним $\mu = 20 \cdot \mathrm{M}(X_1) = 20 \cdot 10 = 200$ и с дисперсией $\sigma^2 = 20 \cdot \mathrm{D}(X_1) = 40$. Тогда искомую вероятность $\mathrm{P}(A)$ можно рассчитать следующим образом:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(S = 190) = \mathrm{P}(190 \le S < 191) \approx \mathrm{P}(190 \le \dot{S} < 191) = F(191) - F(190), \qquad (74)$$

где F – функция распределения СВ $\dot{S}$, т. е. функция нормального распределения вероятностей с $\mu = 200$ и $\sigma^2 = 40$. В Excel последнее в (74) выражение представляется формулой

= НОРМРАСП (191; 200; КОРЕНЬ (40); 1) НОРМРАСП (190; 200; КОРЕНЬ (40); 1)

и дает оценку $\mathrm{P}(A) \approx 0{,}0204$. Точность этой оценки вполне приемлема (в условиях конкретной решаемой сейчас комбинаторной задачи). В эксперименте на GPSS при 100 млн опытов получается оценка $P(A) \approx 0{,}0184$ (ее относительная погрешность составляет ±0,2 %). С учетом этой оценки для $P(A)$ уточненная оценка для m получается равной $nP(A) = 9{,}54 \cdot 10^{13} \cdot 0{,}0184 = 1{,}755 \cdot 10^{12}$ (теперь сообщим точное решение задачи: $m = 1\ 751\ 059\ 016\ 758 \approx 1{,}751 \cdot 10^{12}$).

На рис. 35 показан график эмпирической функции распределения вероятностей СВ S (ступенчатая линия) и график функции распределения нормальной СВ $\dot{S}$ (гладкая кривая). Графики построены на этом же листе (см. рис. 34) методом, описанным в пп. 4.4.4 и 4.5.2. Эти графики иллюстрируют идею перехода от дискретной СВ S к непрерывной СВ $\dot{S}$ в цепочке равенств (74). Очевидна близость вероятности любого значения s дискретной СВ (т. е. высоты ступеньки дискретной функции) и вероятности прилегающего к s единичного интервала непрерывной СВ (т. е. прироста непрерывной функции на этом интервале).

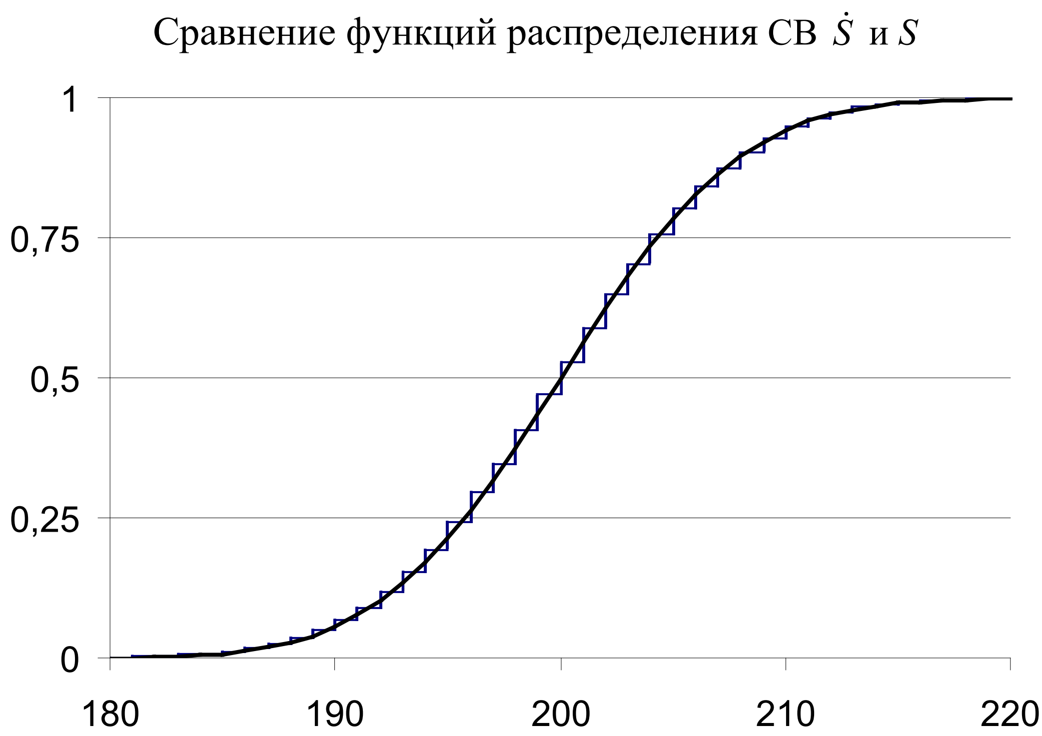


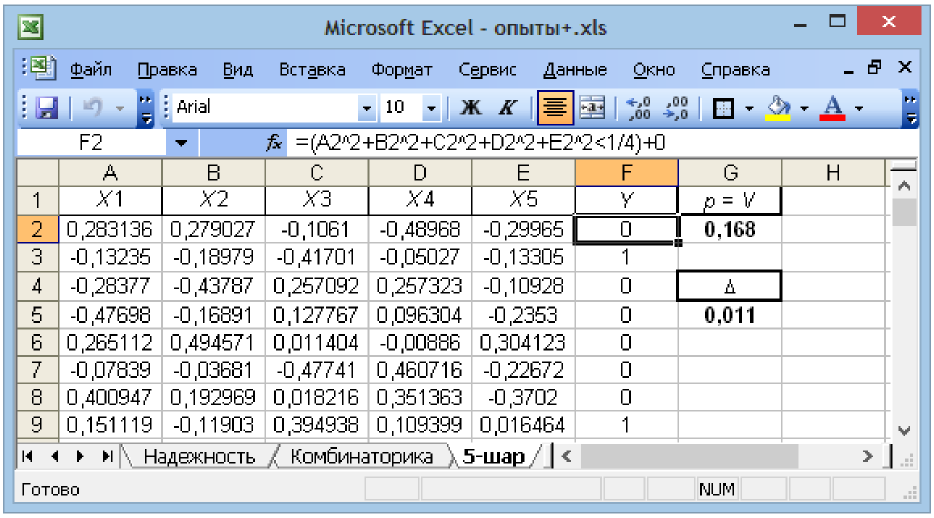
Рис. 35. Эмпирическая функция распределения дискретной СВ S и функция распределения нормальной СВ $\dot{S}$ с такими же средним и дисперсией

Заметим, что для повышения точности результатов СМ при решении комбинаторных задач, так же как и в других случаях, можно использовать ускоренные методы.

4.12. Вычисление определенных интегралов

К вероятностным задачам можно сводить и другие детерминированные задачи, в том числе задачи вычисления определенных интегралов. Например, задачи вычисления площадей плоских фигур, объемов трехмерных или «гиперобъемов» многомерных областей можно преобразовывать в задачи расчета геометрических вероятностей.

На рис. 36 приведен пример расчета гиперобъема V пятимерного шара с радиусом $R = 1$. Эта задача сведена к задаче расчета геометрической вероятности попадания случайной точки, брошенной в пятимерный куб $[-0{,}5;\ 0{,}5]^5$, в шар, вписанный в этот куб. Каждая координата случайной точки разыгрывается в Excel формулой =СЛЧИС()-1/2, индикатор Y попадания точки в шар – формулой =(A2^2+B2^2+C2^2+D2^2+E2^2<1/4)+0 в ячейке F2 и копиями этой ячейки. Формулы для оценки вероятности p и ее абсолютной погрешности Δ впишите в лист самостоятельно. Число опытов здесь взято, как обычно, равным 10 тыс.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	X1	X2	X3	X4	X5	Y	p = V	
2	0,283136	0,279027	-0,1061	-0,48968	-0,29965	0	**0,168**	
3	-0,13235	-0,18979	-0,41701	-0,05027	-0,13305	1		
4	-0,28377	-0,43787	0,257092	0,257323	-0,10928	0	Δ	
5	-0,47698	-0,16891	0,127767	0,096304	-0,2353	0	**0,011**	
6	0,265112	0,494571	0,011404	-0,00886	0,304123	0		
7	-0,07839	-0,03681	-0,47741	0,460716	-0,22672	0		
8	0,400947	0,192969	0,018216	0,351363	-0,3702	0		
9	0,151119	-0,11903	0,394938	0,109399	0,016464	1		

Рис. 36. Расчет объема пятимерного шара

Можно сводить задачи вычисления определенных интегралов и к задачам расчета математических ожиданий СВ (или систем СВ) [9]. Тогда их тоже можно решать методом СМ, разыгрывая выборки соответствующих СВ и рассчитывая искомые интегралы как выборочные средние. Преимущество метода СМ перед «классическими» численными методами расчета интегралов, основанными на регулярных точечных системах (такими как метод прямоугольников или метод парабол при интегрировании функций одного переменного, или как метод точечных сеток при интегрировании функций нескольких переменных), заключается в том, что объем вычислений в методе СМ практически не зависит от кратности интеграла, в то время как в классических методах с ростом кратности интеграла объем вычислений растет в геометрической прогрессии.

Заключение. Задачи и примеры, рассмотренные в данной главе, не исчерпывают и малой доли возможных применений метода СМ, позволяющего решать необозримое множество теоретических абстрактных и практических инженерных задач (как вероятностных, так и детерминированных) путем выполнения со случайными числами экспериментов, интерпретируемых в терминах теории вероятностей (см., например, [14, 15]). В то же время авторы пособия не сомневаются, что приведенного материала достаточно для того, чтобы студенты, прочитавшие его и выполнившие на компьютере хотя бы часть описанных экспериментов, обрели более живое восприятие теории вероятностей и смогли эффективнее использовать ее в ходе обучения в вузе и в дальнейшей профессиональной деятельности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вентцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М. : Академия, 2003. – 448 с.

2. Виленкин, Н.Я. Комбинаторика / Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, П.А. Виленкин. – М. : ФИМА, МНЦМО, 2006. – 400 с.

3. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 2003. – 404 с.

4. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 2003. – 480 с.

5. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике / Д.Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2004. – 256 с.

6. Рябушко, А.П. Индивидуальные задания по высшей математике: Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика : учеб. пособие / А.П. Рябушко. – Мн. : Высш. шк., 2006. – 336 с.

7. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К.Н. Лунгу [и др.] – М. : Айрис-пресс, 2004. – 592 с.

8. Соболь, И.М. Метод Монте-Карло / И.М. Соболь. – М., 1978. – 64 с.

9. Задорожный, В.Н. Имитационное и статистическое моделирование : учеб. пособие / В.Н. Задорожный. – 2-е изд., испр. и доп. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2013. – 136 с.

10. Задорожный, В.Н. Методы моделирования очередей в условиях фрактального трафика в сетях с коммутацией пакетов : учеб. пособие / В.Н. Задорожный, О.И. Кутузов. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2013. – 104 с.

11. Руководство пользователя по GPSS World : пер. с англ. – Казань : Мастер-Лайн, 2002. – 384 с.

12. Задорожный, В.Н. Общая статистическая структура простейших клеточных автоматов // Омский научный вестник. – 2005. – № 2 (31). – С. 150–156.

13. Сачков, В.Н. Вероятностные методы в комбинаторном анализе / В.Н. Сачков. – М. : Наука, 1978. – 288 с.

14. Задорожный, В.Н. Аналитико-имитационные методы решения актуальных задач системного анализа больших сетей / В.Н. Задорожный, Д.Ю. Долгушин, Е.Б. Юдин. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2013. – 324 с.

15. Рыжиков, Ю.И. Имитационное моделирование. Теория и технологии / Ю.И. Рыжиков. – СПб. : КОРОНА принт ; М. : Альтекс-А, 2004. – 384 с.

Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Значения функции Лапласа $\Phi(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,43	0,1664	0,86	0,3051	1,29	0,4015	1,72	0,4573	2,30	0,4893
0,01	0,0040	0,44	0,1700	0,87	0,3078	1,30	0,4032	1,73	0,4582	2,32	0,4898
0,02	0,0080	0,45	0,1736	0,88	0,3106	1,31	0,4049	1,74	0,4591	2,34	0,4904
0,03	0,0120	0,46	0,1772	0,89	0,3133	1,32	0,4066	1,75	0,4599	2,36	0,4909
0,04	0,0160	0,47	0,1808	0,90	0,3159	1,33	0,4082	1,76	0,4608	2,38	0,4913
0,05	0,0199	0,48	0,1844	0,91	0,3186	1,34	0,4099	1,77	0,4616	2,40	0,4918
0,06	0,0239	0,49	0,1879	0,92	0,3212	1,35	0,4115	1,78	0,4625	2,42	0,4922
0,07	0,0279	0,50	0,1915	0,93	0,3238	1,36	0,4131	1,79	0,4633	2,44	0,4927
0,08	0,0319	0,51	0,1950	0,94	0,3264	1,37	0,4147	1,80	0,4641	2,46	0,4931
0,09	0,0359	0,52	0,1985	0,95	0,3289	1,38	0,4162	1,81	0,4649	2,48	0,4934
0,10	0,0398	0,53	0,2019	0,96	0,3315	1,39	0,4177	1,82	0,4656	2,50	0,4938
0,11	0,0438	0,54	0,2054	0,97	0,3340	1,40	0,4192	1,83	0,4664	2,52	0,4941
0,12	0,0478	0,55	0,2088	0,98	0,3365	1,41	0,4207	1,84	0,4671	2,54	0,4945
0,13	0,0517	0,56	0,2123	0,99	0,3389	1,42	0,4222	1,85	0,4678	2,56	0,4948
0,14	0,0557	0,57	0,2157	1,00	0,3413	1,43	0,4236	1,86	0,4686	2,58	0,4951
0,15	0,0596	0,58	0,2190	1,01	0,3438	1,44	0,4251	1,87	0,4693	2,60	0,4953
0,16	0,0636	0,59	0,2224	1,02	0,3461	1,45	0,4265	1,88	0,4699	2,62	0,4956
0,17	0,0675	0,60	0,2257	1,03	0,3485	1,46	0,4279	1,89	0,4706	2,64	0,4959
0,18	0,0714	0,61	0,2291	1,04	0,3508	1,47	0,4292	1,90	0,4713	2,66	0,4961
0,19	0,0753	0,62	0,2324	1,05	0,3531	1,48	0,4306	1,91	0,4719	2,68	0,4963
0,20	0,0793	0,63	0,2357	1,06	0,3554	1,49	0,4319	1,92	0,4726	2,70	0,4965
0,21	0,0832	0,64	0,2389	1,07	0,3577	1,50	0,4332	1,93	0,4732	2,72	0,4967
0,22	0,0871	0,65	0,2422	1,08	0,3599	1,51	0,4345	1,94	0,4738	2,74	0,4969
0,23	0,0910	0,66	0,2454	1,09	0,3621	1,52	0,4357	1,95	0,4744	2,76	0,4971
0,24	0,0948	0,67	0,2486	1,10	0,3643	1,53	0,4370	1,96	0,4750	2,78	0,4973
0,25	0,0987	0,68	0,2517	1,11	0,3665	1,54	0,4382	1,97	0,4756	2,80	0,4974
0,26	0,1026	0,69	0,2549	1,12	0,3686	1,55	0,4394	1,98	0,4761	2,82	0,4976
0,27	0,1064	0,70	0,2580	1,13	0,3708	1,56	0,4406	1,99	0,4767	2,84	0,4977
0,28	0,1103	0,71	0,2611	1,14	0,3729	1,57	0,4418	2,00	0,4772	2,86	0,4979
0,29	0,1141	0,72	0,2642	1,15	0,3749	1,58	0,4429	2,02	0,4783	2,88	0,4980
0,30	0,1179	0,73	0,2673	1,16	0,3770	1,59	0,4441	2,04	0,4793	2,90	0,4981
0,31	0,1217	0,74	0,2703	1,17	0,3790	1,60	0,4452	2,06	0,4803	2,92	0,4982
0,32	0,1255	0,75	0,2734	1,18	0,3810	1,61	0,4463	2,08	0,4812	2,94	0,4984
0,33	0,1293	0,76	0,2764	1,19	0,3830	1,62	0,4474	2,10	0,4821	2,96	0,4985
0,34	0,1331	0,77	0,2794	1,20	0,3849	1,63	0,4484	2,12	0,4830	2,98	0,4986
0,35	0,1368	0,78	0,2823	1,21	0,3869	1,64	0,4495	2,14	0,4838	3,00	0,49865
0,36	0,1406	0,79	0,2852	1,22	0,3883	1,65	0,4505	2,16	0,4846	3,20	0,49931
0,37	0,1443	0,80	0,2881	1,23	0,3907	1,66	0,4515	2,18	0,4854	3,40	0,49966
0,38	0,1480	0,81	0,2910	1,24	0,3925	1,67	0,4525	2,20	0,4861	3,60	0,499841
0,39	0,1517	0,82	0,2939	1,25	0,3944	1,68	0,4535	2,22	0,4868	3,80	0,499928
0,40	0,1554	0,83	0,2967	1,26	0,3962	1,69	0,4545	2,24	0,4875	4,00	0,499968
0,41	0,1591	0,84	0,2995	1,27	0,3980	1,70	0,4554	2,26	0,4881	4,50	0,499997
0,42	0,1628	0,85	0,3023	1,28	0,3997	1,71	0,4564	2,28	0,4887	5,00	0,499997

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Котюргина Александра Станиславовна
Задорожный Владимир Николаевич
Федорова Елена Ивановна

ВЕРОЯТНОСТЬ: ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

Учебное пособие

Редактор *К. В. Муковоз*

Компьютерная верстка *Ю. П. Шелехиной*

Сводный темплан 2014 г.
Подписано в печать 05.12.14. Формат $60 \times 84^1/_{16}$. Отпечатано на дупликаторе.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 12,25. Уч.-изд. л. 12,25.
Тираж 100 экз. Заказ 648.

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр. Мира, 11; т. 23-02-12.
Типография ОмГТУ.